

# ***COURS DE LA MECANIQUE DES FLUIDES***

**Dr Edmond Claude VODOUNNOU**  
*Maitre-Assistant des Universités CAMES*

Ce cours est destiné pour les apprenants de la deuxième année des cours préparatoires pour les cycles d'ingénieur de conception (Génie Mécanique et Energétique, Génie Civil, Génie Chimique et Procédés...) et ceux de la première année de Master en Energies Renouvelables et Systèmes Energétiques.

### **1.Objectif général**

Acquérir les connaissances nécessaires et suffisantes en Mécanique des Fluides pour être capable de faire les choix de modélisation les mieux adaptés dans le but d'analyser et/ou de participer à la conception des systèmes mécaniques complexes.

### **2.Objectifs spécifiques**

À l'issue de ce module, l'apprenant doit avoir acquis les concepts fondamentaux de la mécanique des fluides et une bonne connaissance de l'outil de calcul de CFD

"FLUENT" (Computational fluid dynamics simulation software)

Il doit notamment avoir compris :

- la signification physique des concepts fondamentaux de la Mécanique des fluides (statique, cinématique, calculs d'efforts...);
- les effets physiques induits par les principaux phénomènes d'écoulement (transport, diffusion...);
- l'importance relative des principales forces en action dans différentes configurations d'écoulement (pression, gravité, viscosité, accélération...).

Il doit avoir acquis la connaissance et la pratique des théorèmes généraux et des méthodes d'approche des problèmes. Il doit enfin, être en mesure de comprendre, de mettre en équations à l'aide des théorèmes généraux et de résoudre une large gamme de problèmes d'ingénieur relevant de la Mécanique des fluides incompressibles, afin d'en tirer des conclusions pratiques.

### **3. Pré-requis :**

Notion de fluides

Notion de cinématique

Notion de dérivé partielle

Notions de masse volumique, de la viscosité, de pression et des forces de pression.

### **4.Contenu**

## 1. Thèmes

### A. Propriétés physiques des fluides :

Définition d'un fluide ; forces en présence : pression et effets visqueux ; propriétés : masse volumique, viscosités, compressibilité, dilatation, capillarité.

### B. Lois de l'hydrostatique :

Calcul de forces, couple et centre de poussée (surfaces planes ou gauches) ; poussée d'Archimède.

### C. Cinématique des fluides :

Approches Lagrangienne, Eulérienne, dérivée matérielle, lignes de courant ; notion de débit, conservation de la masse, équation de continuité.

### D. Dynamique des fluides parfaits :

Equations d'Euler ; théorème de Bernoulli (de base et généralisé).

### E. Pertes de charges :

Application aux réseaux de conduites (abaques).

### F. Théorème des quantités de mouvement :

Applications au calcul des efforts (coudes, rétrécissement, poussée d'un réacteur, théorie des hélices).

### G. CFD et apprentissage de FLUENT :

Equations de Navier-Stokes ; principes de la CFD ; choix de modélisation (conditions aux limites, maillages...) mini-projets ; notions sur la turbulence.

## 2. Méthode(s) pédagogique(s)

- Expositive et Interrogative (dès que possible) pour l'aspect cours ;
- Interrogative pour l'aspect TD ;
- Interrogative et ~Active pour les atelier-projets.

## 3. Documents pédagogiques

- Notion de Mécanique des fluides : cours et exercices corrigés ; **Riadh BEN**

### **HAMOUDA**

- Série Schaum Mécanique des fluides et hydraulique

## **1 INTRODUCTION**

La mécanique des fluides est la science des lois de l'écoulement des fluides. Elle est la base du dimensionnement des conduites de fluides et des mécanismes de transfert des fluides. C'est une branche de la physique qui étudie les écoulements de fluides c'est-à-dire des liquides et des gaz lorsque ceux-ci subissent des forces ou des contraintes. Elle comprend deux grandes sous branches:

- la statique des fluides, ou hydrostatique qui étudie les fluides au repos. C'est historiquement le début de la mécanique des fluides, avec la poussée d'Archimède et l'étude de la pression.
- la dynamique des fluides qui étudie les fluides en mouvement. Comme autres branches de la mécanique des fluides.

On distingue également d'autres branches liées à la mécanique des fluides : l'hydraulique, l'hydrodynamique, l'aérodynamique, ... Une nouvelle approche a vu le jour depuis quelques décennies: la mécanique des fluides numérique (CFD ou *Computational Fluid Dynamics* en anglais), qui simule l'écoulement des fluides en résolvant les équations qui les régissent à l'aide d'ordinateurs très puissants : les supercalculateurs.

La mécanique des fluides a de nombreuses applications dans divers domaines comme l'ingénierie navale, l'aéronautique, mais aussi la météorologie, la climatologie ou encore l'océanographie.

## **2 DEFINITIONS**

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Les forces de cohésion entres particules élémentaires sont

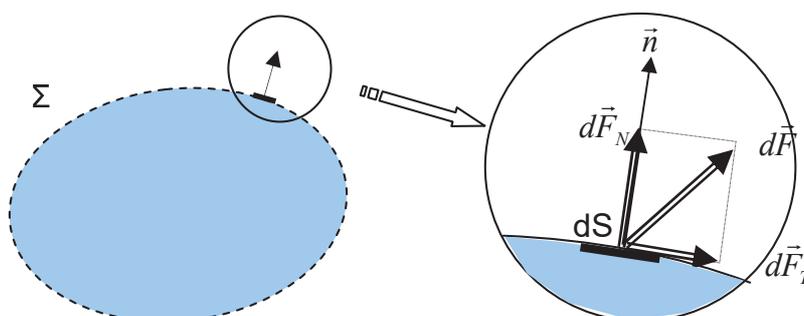
très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre qui prend la forme du récipient qui le contient, par exemple: les métaux en fusion sont des fluides qui permettent par moulage d'obtenir des pièces brutes de formes complexes.

On insiste sur le fait qu'un fluide est supposé être un milieu continu : même si l'on choisit un très petit élément de volume, il sera toujours beaucoup plus grand que la dimension des molécules qui le constitue. Par exemple, une gouttelette de brouillard, aussi petite soit-elle à notre échelle, est toujours immense à l'échelle moléculaire. Elle sera toujours considérée comme un milieu continu. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz.

Les fluides peuvent aussi se classer en deux familles relativement par leur viscosité. La viscosité est une de leur caractéristique physico-chimique qui sera définie dans la suite du cours et qui définit le frottement interne des fluides. Les fluides peuvent être classés en deux grande familles : La famille des fluides "newtoniens" (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) et celle des fluides "non newtoniens" (quasiment tout le reste... le sang, les gels, les boues, les pâtes, les suspensions, les émulsions...). Les fluides "newtoniens" ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température. La deuxième famille est constituée par les fluides "non newtoniens" qui ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent. Ce cours est limité uniquement à des fluides newtoniens qui seront classés comme suit.

## 2.1 *Fluide parfait*

Soit un système fluide, c'est-à-dire un volume délimité par une surface fermée  $\Sigma$  fictive ou non.



Considérons  $d\vec{F}$  la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire  $dS$  de normale  $\vec{n}$  entre le fluide et le milieu extérieur.

On peut toujours décomposer  $d\vec{F}$  en deux composantes:

- une composante  $d\vec{F}_T$  tangentielle à  $dS$ .
- une composante  $d\vec{F}_N$  normale à  $dS$ .

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. C'est à dire quand la composante  $d\vec{F}_T$  est nulle. Autrement dit, la force  $d\vec{F}$  est normale à l'élément de surface  $dS$ .

## **2.2 *Fluide réel***

Contrairement à un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prise en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide.

C'est uniquement au repos, qu'on admettra que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait, et on suppose que les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent. La statique des fluides réels se confond avec la statique des fluides parfaits.

## **2.3 *Fluide incompressible***

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

## **2.4 *Fluide compressible***

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles. Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

### 3 CARACTERISTIQUES PHYSIQUES

#### 3.1 Masse volumique

$$\rho = \frac{m}{V}$$

où :

$\rho$  : Masse volumique en (kg/m<sup>3</sup>),

m : masse en (kg),

V : volume en (m<sup>3</sup>).

Exemples :

Fluide	Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Type de fluide
Benzène	0,880. 10 <sup>3</sup>	Incompressible
Chloroforme	1,489. 10 <sup>3</sup>	
Eau	10 <sup>3</sup>	
Huile d'olive	0,918. 10 <sup>3</sup>	
Mercure	13,546. 10 <sup>3</sup>	
Air	0,001205. 10 <sup>3</sup>	compressible <sup>1</sup>
Hydrogène	0,000085. 10 <sup>3</sup>	
Méthane	0,000717. 10 <sup>3</sup>	

#### 3.2 Poids volumique

$$\varpi = \frac{m \cdot g}{V} = \rho \cdot g$$

$\varpi$  : Poids volumique en (N/m<sup>3</sup>).

m : masse en (kg),

g : accélération de la pesanteur en (m/s<sup>2</sup>),

V : volume en (m<sup>3</sup>).

#### 3.3 Densité

$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}}$$

Dans le cas des liquides on prendra l'eau comme fluide de référence. Dans le cas des gaz on prendra l'air comme fluide de référence.

---

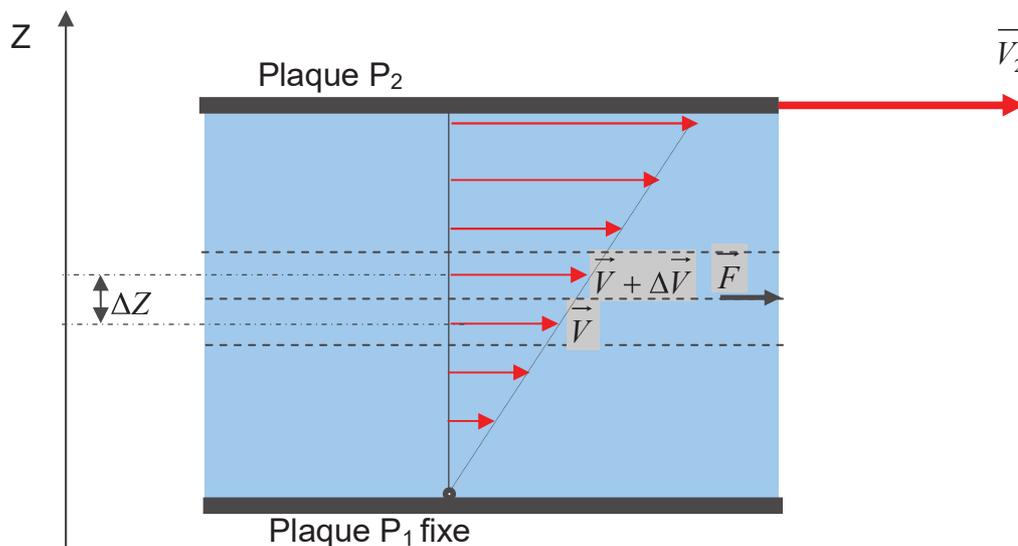
<sup>1</sup> Ces valeurs sont prise à titre indicatif dans les conditions normales de pression et de température.

### 3.4 Viscosité

C'est une grandeur qui caractérise les frottements internes du fluide, autrement dit sa capacité à s'écouler. Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force. C'est à dire, les fluides de grande viscosité résistent à l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement. Elle peut être mesurée par un viscosimètre à chute de bille, dans lequel on mesure le temps écoulé pour la chute d'une bille dans le fluide. Elle peut également être mesurée par un récipient dont le fond comporte un orifice de taille standardisée. La vitesse à laquelle le fluide s'écoule par cet orifice permet de déterminer la viscosité du fluide.

La viscosité est déterminée par la capacité d'entraînement que possède une couche en mouvement sur les autres couches adjacentes.

Par exemple, si on considère un fluide visqueux placé entre deux plaques  $P_1$  et  $P_2$ , tel que la plaque  $P_1$  est fixe et la plaque  $P_2$  est animée d'une vitesse  $\vec{V}_2$ .



Si on représente par un vecteur, la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement, la courbe lieu des extrémités de ces vecteurs représente le profil de vitesse. Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant du glissement des couches de fluide les unes sur les autres. La vitesse de chaque couche est une fonction de la distance  $Z$ . On distingue la viscosité dynamique et la viscosité cinématique.

- **Viscosité dynamique**

La viscosité dynamique exprime la proportionnalité entre la force qu'il faut exercer sur une plaque lorsqu'elle est plongée dans un courant et la variation de vitesse des veines de fluide entre les 2 faces de la plaque. ...Elle est exprimée par un coefficient représentant la contrainte de cisaillement nécessaire pour produire un gradient de vitesse d'écoulement d'une unité dans la matière.

Considérons deux couches de fluide adjacentes distantes de  $\Delta z$ . La force de frottement  $F$  qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre. Elle est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit  $\Delta v$ , à leur surface  $S$  et inversement proportionnelle à  $\Delta z$  : Le facteur de proportionnalité  $\mu$  est le coefficient de viscosité dynamique du fluide.

$$F = \mu \cdot S \cdot \frac{\Delta V}{\Delta Z} *$$

où :

$F$  : force de glissement entre les couches en (N),

$\mu$  : Viscosité dynamique en (kg/m.s),

$S$  : surface de contact entre deux couches en (m<sup>2</sup>),

$\Delta V$  : Écart de vitesse entre deux couches en (m/s),

$\Delta Z$  : Distance entre deux couches en (m).

Remarque : Dans le système international (SI), l'unité de la viscosité dynamique est le Pascal seconde (Pa.s) ou Poiseuille (PI) : 1 Pa.s = 1 PI = 1 kg/m.s

Exemple :

Fluide	$\mu$ (Pa.s)
eau (0 °C)	$1,787 \cdot 10^{-3}$
eau (20 °C)	$1,002 \cdot 10^{-3}$
eau (100 °C)	$0,2818 \cdot 10^{-3}$
Huile d'olive (20 °C)	$\approx 100 \cdot 10^{-3}$
glycérol (20 °C)	$\approx 1000 \cdot 10^{-3}$
Hydrogène (20 °C)	$0,86 \cdot 10^{-5}$
Oxygène (20 °C)	$1,95 \cdot 10^{-5}$

- **Viscosité cinématique**

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

L'unité de la viscosité cinématique est le (m<sup>2</sup>/s).

Remarque 1 (unité):

On utilise souvent le Stokes (St) comme unité de mesure de la viscosité cinématique.

$$1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

Remarque 2 (Influence de la température) :

Lorsque la température augmente, la viscosité d'un fluide décroît car sa densité diminue.

Remarque 3 (différence entre viscosité dynamique et viscosité cinématique)

La viscosité cinématique caractérise le temps d'écoulement d'un liquide. Par contre, la viscosité dynamique correspond à la réalité physique du comportement d'un fluide soumis à une sollicitation (effort). En d'autre terme, cette dernière exprime la « rigidité » d'un fluide à une vitesse de déformation en cisaillement (voir la relation \* à la page 6).

## 4 CONCLUSION

Les fluides peuvent être classés en **fluides parfaits** (sans frottement), **fluides réels** (avec frottement), **fluides incompressibles** (liquides) et **fluides compressibles** (gaz). Les fluides sont caractérisés par les propriétés suivantes: la masse volumique, le poids volumique, la densité et la viscosité. Ces propriétés seront utilisées ultérieurement.

Le comportement mécanique et les propriétés physiques des fluides compressibles et ceux des fluides incompressibles sont différents. En effet, les lois de la mécanique des fluides ne sont pas universelles. Elles sont applicables uniquement pour une classe de fluides donnée. Conformément à la classification qui a été faite, les lois relatives à chaque type de fluides seront exposées dans la suite du cours d'une façon indépendante.

## 5 Exercices d'application

### Exercice N° 1:

#### ENONCE

Déterminer le poids volumique de l'essence sachant que sa densité  $d=0,7$ .

On donne :

- l'accélération de la pesanteur  $g=9,81 \text{ m/s}^2$
- la masse volumique de l'eau  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$

### Exercice N° 2:

#### ENONCE

Calculer le poids  $P_0$  d'un volume  $V=3$  litres d'huile d'olive ayant une densité  $d=0,918$ .

### Exercice N° 3: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 23-06-2003

#### ENONCE

Quelle est l'influence de la température sur la viscosité ?

### Exercice N° 4: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 15-01-2004

#### ENONCE

Convertir le stockes en  $\text{m}^2/\text{s}$ .

### Exercice N° 5: EXTRAIT DE L'EXAMEN DU 24-06-2004

#### ENONCE

Expliquer le principe de mesure d'un viscosimètre à chute de bille.

### Exercice N° 6: EXTRAIT DU DEVOIR SURVEILLE DU 21-04-2003

#### ENONCE

Déterminer la viscosité dynamique de l'huile d'olive sachant que sa densité est  $0,918$  et sa viscosité cinématique est  $1,089$  Stockes.

### Exercice N° 7:

#### ENONCE

Du fuel porté à une température  $T=20^\circ\text{C}$  a une viscosité dynamique  $\mu = 95.10^{-3} \text{ Pa.s}$ . Calculer sa viscosité cinématique  $\nu$  en stockes sachant que sa densité est  $d=0,95$ .

On donne la masse volumique de l'eau est  $\rho_{eau} = 1000 \text{ kg/m}^3$

## Chapitre 2 Statique des fluides ou Hydrostatique

### 2.1 Introduction

L'agitation moléculaire va être responsable de l'existence d'une pression dans un fluide. Pour mettre en évidence une telle force, on plonge dans un récipient contenant un fluide, un tube vide, muni d'une membrane à l'une de ces extrémités (voir Fig 2.1).

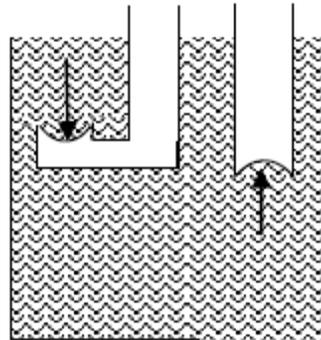


Fig.2.1: Mise en évidence d'une pression dans un fluide

On constate une déformation de la membrane, preuve qu'elle subit une force de pression provenant du fluide dans le récipient.

**Remarque:** Cette force est dirigée **du fluide** du récipient **vers l'air** contenu dans le tube comme le montre les flèches noires.

De façon générale,

### 2.2. Définition:

Soit  $dS$  un élément de surface et  $d\vec{f}$  une force élémentaire qui s'exerce sur  $dS$  de (1) vers (2). On peut décomposer  $d\vec{f}$  en deux vecteurs (composantes): un normal ( $d\vec{f}_N$ ) et l'autre tangentielle ( $d\vec{f}_T$ ). Si ( $d\vec{f}_T$ ) existe, elle sera **responsable de d'un mouvement, elle n'existe qu'en dynamique**.

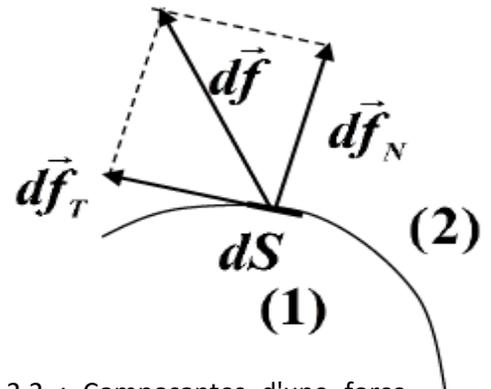


Fig.2.2 : Composantes d'une force dans un fluide

### 2.3. Pression en un point d'un fluide au repos

$$d\vec{f}_n = -P\vec{n}ds \quad (2.1)$$

où  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal (ou vecteur normal sortant) est **orienté du fluide vers l'élément de surface  $dS$**  (et non le contraire) et  $P$  un scalaire. Le signe moins (-) dans l'expression (2.1) traduit le fait que  $\vec{n}$  est **orienté vers l'extérieur**, c'est-à-dire ici de (2) vers (1) dans la figure 2.2

$d\vec{f}_n$  est donc proportionnel à  $dS$  (plus  $dS$  est grand, plus  $d\vec{f}_n$ ) et le coefficient est  $P$ .

On peut montrer que  $P$  est indépendant de la surface  $S$

**Preuve:**

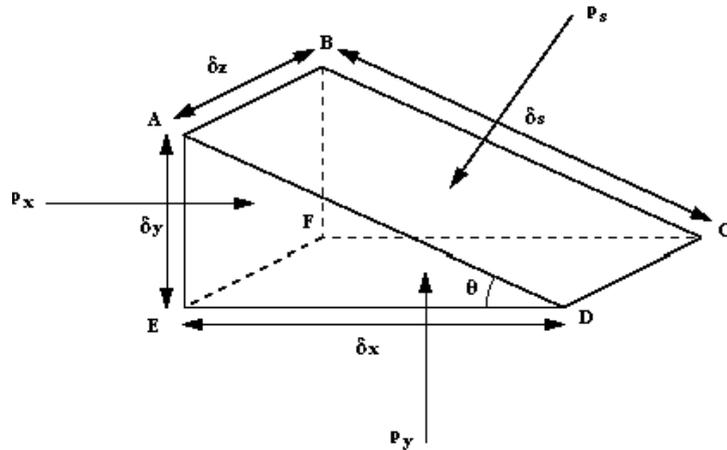


Fig.2.3: Pression en un point d'un fluide

Considérons un élément de fluide ABCDEF (prisme triangulaire) et soit  $P_x$ ,  $P_y$  et  $P_s$  les pressions dans les trois directions  $x$ ,  $y$  et  $s$

– Selon la direction  $x$ :

- Force due à  $P_x$ :  $F_{xx} = P_x \cdot (ABFE) = P_x \delta y \delta z$
- Force due à  $P_y$ :  $F_{yx} = 0$
- Composante due à  $P_s$ :  $F_{sx} = -P_s \cdot (ABCD \cdot \sin\theta) = -P_s \delta s \delta z \frac{\delta y}{\delta s}$   
donc :  $F_{sx} = -P_s \cdot \delta y \delta z$

et puisque le fluide est en équilibre (au repos):  $F_{xx} + F_{yx} + F_{sx} = 0$   
on est donc conduit à :  $P_x \delta y \delta z - P_s \delta y \delta z = 0$  soit  $\boxed{P_x = P_s}$

– Selon la direction  $y$ :

- Force due à  $P_y$ :  $F_{yy} = P_y \cdot (DCFE) = P_y \delta x \delta z$
- Force due à  $P_x$ :  $F_{xy} = 0$
- Composante due à  $P_s$ :  $F_{sy} = -P_s \cdot (ABCD \cdot \cos\theta) = -P_s \delta s \delta z \frac{\delta x}{\delta s}$   
donc :  $F_{sy} = -P_s \cdot \delta x \delta z$

et puisque le fluide est en équilibre:  $F_{yy} + F_{xy} + F_{sy} = 0$   
on est donc conduit à :  $P_y \delta x \delta z - P_s \delta x \delta z = 0$  soit  $\boxed{P_y = P_s}$

et finalement:  $\boxed{P_x = P_y = P_s}$

**Conclusion**

**Loi de Pascal:** La pression en un point d'un fluide est la même dans toutes les directions. On dit que la pression en un point d'un fluide est **isotrope**.

**Unités de Pression**

Plusieurs unités existent :

- le ( $P_a$ ) : unité SI peu utilisé en pratique
- le ( $bar$ ) et son sous multiple le millibar ( $mbar$ )

- le millimètre de mercure ou Torr
- le millimètre de colonne d'eau ou le mètre de colonne d'eau (*m CE*)
- l'atmosphère (*atm*)

**La correspondance entre ces unités est la suivante**

$$1 \text{ bar} = 10^5 P_a = 1000 \text{ mbar} \cong 760 \text{ mm de mercure} \cong 10.2 \text{ m CE}$$

$$1 \text{ atm} = 1.013 \cdot 10^5 P_a$$

## 2.4 Principe fondamental de l'hydrostatique: Equation de Pascal

Considérons un élément de fluide de forme cylindrique dont l'axe fait un angle  $\alpha$  avec la direction verticale. Cet élément fluide est isolé par la pensée au sein d'un fluide de masse volumique  $\rho$  (Voir Fig.2.4)

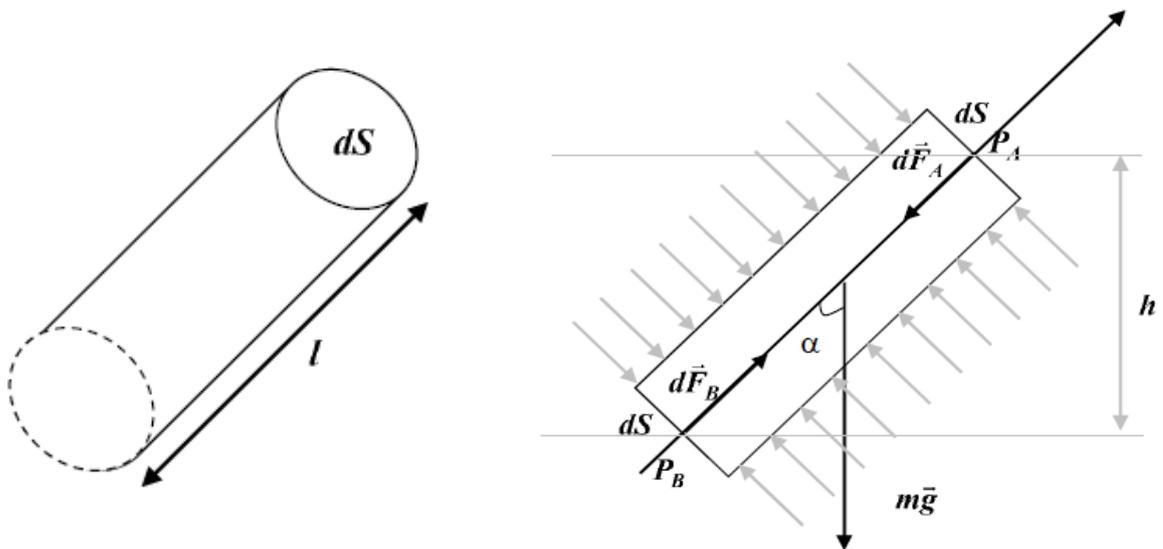


Fig.2.4: Etablissement de la relation fondamentale de l'hydrostatique (RFH)

Le volume élémentaire de cet élément cylindrique est:  $dV = l \cdot dS$

**Bilan** des forces qui s'appliquent au cylindre: son poids est les forces de pression.

**Projection** suivant l'axe du cylindre orienté vers le haut:

- le poids:  $P_{axe} = -m \cdot g \cdot \cos \alpha = -\rho \cdot dV \cdot g \cdot \cos \alpha$
- les forces de pression qui s'exercent sur la surface latérale (flèches grises), n'ont pas de composantes sur cet axe (elles sont perpendiculaires). Donc elles sont nulles.
- en A, on a:  $F_A = -P_A \cdot dS$
- en B, on a:  $F_B = P_B \cdot dS$

Le cylindre est au repos. Donc la somme des forces qui s'appliquent à lui est nulle.

$$\begin{aligned} -\rho \cdot dV \cdot g \cdot \cos \alpha - P_A \cdot dS + P_B \cdot dS &= 0 \\ -\rho \cdot l \cdot dS \cdot g \cdot \cos \alpha - P_A \cdot dS + P_B \cdot dS &= 0 \\ dS(-\rho \cdot l \cdot g \cdot \cos \alpha - P_A + P_B) &= 0 \end{aligned}$$

Soit :  $-\rho \cdot l \cdot g \cdot \cos \alpha - P_A + P_B = 0$ . Or  $l \cdot \cos \alpha = h$  (hauteur entre B et A)  
 Finalement,

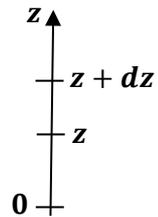
$$P_B - P_A = \rho \cdot g \cdot h = \rho \cdot g(z_A - z_B) \quad (2.2)$$

**Théorème de Pascal:**

La différence de pression entre deux (2) niveaux quelconques d'un fluide en équilibre est égale au poids d'un cylindre de fluide de section unité et ayant pour hauteur la dénivellation (distance) entre les deux niveaux.

**Forme différentielle du théorème de Pascal**

On oriente vers le haut un axe vertical  $Oz$  au sein d'un fluide au repos.  
 On considère une différence de niveaux comprise entre les altitudes  $z$  et  $z + dz$  (Fig 2.5)  
 On pose alors :



$$z_B = z \quad z_A = z + dz$$

$$P_B = z \quad P_A = P_B + dP$$

Ainsi :  $dP = -\rho \cdot g \cdot dz$  soit :  $P(z) - P(z + dz) = \rho \cdot g \cdot dz$

Fig. 2.5: Le gradient vertical de pression équilibre la pesanteur

La forme différentielle du théorème de Pascal se présente généralement sous la forme :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \quad (2.3)$$

**Conséquences :**

**a. Pression dans un récipient**

Tous les points d'un même fluide situés dans un même plan horizontal sont à la même pression

**b. Vases communicants**

La surface libre d'un liquide, qui est le lieu des points à la pression atmosphérique, est donc un plan horizontal, et cela quelle que soit la forme du récipient.

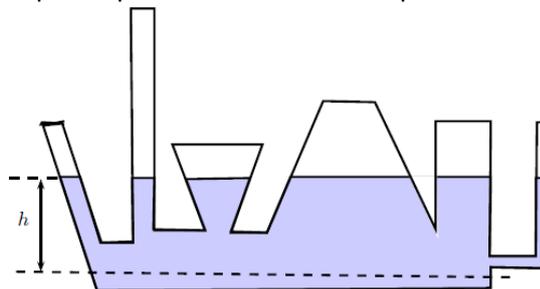


Figure. 2.6 : Surface libre de fluide dans les vases communicants

Autrement dit, lorsqu'on verse un liquide dans des vases communicants, celui-ci coule dans tous les récipients et les niveaux libres du liquide dans les divers récipients se trouvent dans un même plan horizontal.

**Applications :**

- Indicateur de niveau
- Distribution d'eau dans les villes
- Niveau d'arpenteur
- Ecluse
- Siphon

### c. Pressions sur les parois

La différence de pression entre les surfaces libres et le fond de chaque récipient est identique et donnée par :  $\rho \cdot g \cdot h$ . **C'est le paradoxe hydrostatique**

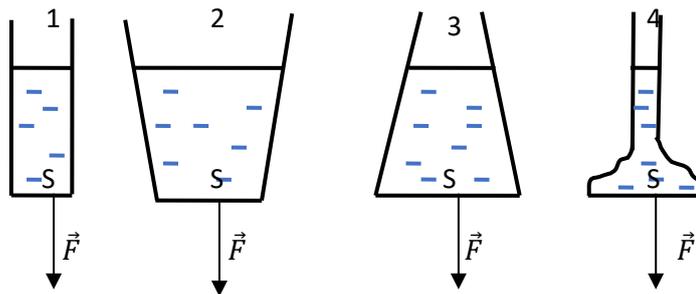


Figure. 2.7 : Paradoxe hydrostatique

Cependant, la force de pression  $\vec{F}$  est à l'exception du cas (1), différente du poids du fluide contenu dans le récipient

### d. Pression dans l'océan

A la profondeur  $h$  dans l'eau, l'eau étant incompressible  $P_B = P_{atm} + \rho \cdot g \cdot h$ , la pression augmente linéairement avec la profondeur.

Exemple :

$$\text{Pour } h=5000\text{m, } P_B = P_{atm} + \frac{1000 \times 10 \times 5000}{1.013 \cdot 10^5} \cong 501 \text{ atm}$$

### e. Pression dans l'atmosphère

L'air est obéit à la loi des gaz parfaits. En ce sens pour une mole on peut écrire :

$$PV = RT \quad \text{ou} \quad P = \frac{RT}{M/\rho} = \rho \frac{RT}{M} \quad (P: \text{pression}; \quad V: \text{volume molaire}; \quad M: \text{masse molaire}; \\ T: \text{température}; \quad R: \text{constante des gaz parfaits}; \quad \rho: \text{densité massique}). \text{ D'après (2.3) on a :}$$

$$dP = -\rho g dz \text{ et donc } \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz$$

Faisons les hypothèses suivantes :

- La température  $T$  de l'air est invariable avec l'altitude (atmosphère isotherme) avec une valeur moyenne égale à  $T = 273 \text{ K}$  (hypothèse fausse)

– L'accélération de la pesanteur  $g$  est constante (vrai à 1% près jusqu'à 30 Km d'altitude),

On peut alors écrire  $\frac{dP}{P} = -\frac{dz}{H}$  avec  $H = \frac{RT_0}{Mg} = \frac{8.314 \times 273}{29 \times 10^{-3} \times 9.81} \cong 8 \text{ Km}$ . Par intégration entre 0 et  $z$  on obtient :  $P(z) = P(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$  la pression diminue de façon exponentielle avec l'altitude. On déduit aisément  $\rho(z) = \rho(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$  avec  $\rho_0 = \frac{P_0 M}{RT}$

**Exercice :**

1. Donner une estimation de l'altitude  $z$  lorsque la pression atmosphérique est moitié de sa valeur
2. Tracer la courbe représentative de l'altitude  $z$  en fonction de la pression  $P$ .

**f. Surface libre d'un liquide au repos**

Supposons que la surface libre d'un liquide au repos ne soit pas horizontale (voir Fig.2.8). Alors, on a:

$$P_A - P_B = \rho g h . \text{ Mais, } P_B = P_A = P_{atm} = 1 \text{ atm donc } \rho g h = 0 .$$

Comme  $\rho g \neq 0$  alors  $h = 0$ .

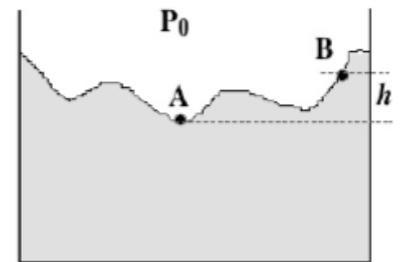


Fig.2.8: La surface libre d'un fluide au repos est plane et horizontale

**Conclusion** la *surface libre d'un fluide au repos est horizontale*

**Remarque**  $1 \text{ atm} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 76 \text{ cm Hg}$  et  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

**g. Mesure de pression atmosphérique: Baromètre de Torricelli**

Soit une cuve remplie de mercure. On remplit un tube dans cette cuve, on le bascule à la verticale en faisant attention de **ne pas** faire entrer **de l'air**. (Voir Fig. 2.9).

**Constat:** Que le tube soit incliné ou absolument verticale, la hauteur  $h$  ne change pas.

Comme la pression est due à l'agitation moléculaire, alors pour le vide au-dessus de  $C$ ,  $P_C = 0$

$P_B = P_C + \rho_{Hg} g h$  et  $P_B = P_A = P_{atm}$  (plan horizontal). On sait que  $\rho_{Hg} \cong 13600 \text{ kg/m}^3$  et  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  et par expérience  $h \cong 76 \text{ cm Hg}$

**Conclusion**, la pression atmosphérique correspond à  $76 \text{ cm Hg}$

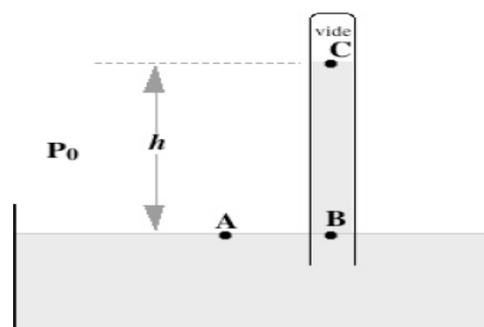


Figure. 2.9 : Baromètre de Torricelli

**Définition** : La pression atmosphérique est la pression exercée par l'atmosphère à la surface de la terre. Au niveau de la mer, cette pression est équivalente à celle exercée par une colonne d'environ 760 mm Hg. Elle varie tous les jours légèrement : elle est néanmoins toujours voisine de 1 bar.

Remarques :

1. On utilise souvent en médecine le  $Torr = 1 \text{ mm Hg}$ .
2. Si l'expérience est faite avec de l'eau, on trouverait :  $h = \frac{1.013 \cdot 10^5}{1000 \times 9.81} \cong 10$

**h. Notion de pression Absolue et de pression Effective (pression manométrique)**

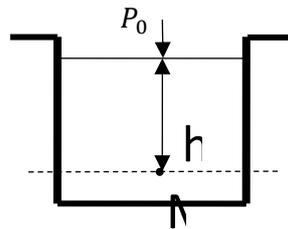


Fig.2.10: Notion de pression Absolue et de pression Effective

Au point M , la pression est égale à:

$$P_M = P_0 + \rho gh$$

A la surface libre du fluide, la pression est généralement prise égale à la pression atmosphérique  $P_{atm}$ , d'où :

$$P_M = P_{atm} + \rho gh \quad : \text{Pression Absolue} \quad (2.4)$$

Si l'on néglige l'influence de la pression atmosphérique ( $P_{atm} = 0$ )

$$P_M = \rho gh \quad : \text{Pression effective ou pression manométrique ou pression de jauge} \quad (2.5)$$

**i. Dispositifs de mesure de Pression**

Le dispositif utilisé dépend de l'importance des pressions à mesurer. Il existe deux types de dispositifs de mesure des pressions:

- **Les tubes manométriques:** utilisés pour la mesure de pressions relativement faibles (en laboratoire)
- **Les manomètres mécaniques:** utilisés pour la mesure de pressions relativement élevées (1 à 2  $kg/cm^2$ )

☞ **Principe du tube manométrique**

Pour mesurer la pression dans un réservoir de fluide (gaz ou liquide), on peut relier ce réservoir à l'extérieur par un tube en U ouvert à l'atmosphère qu'on appelle manomètre. Le liquide contenu dans le tube doit être non miscible avec celui du réservoir.

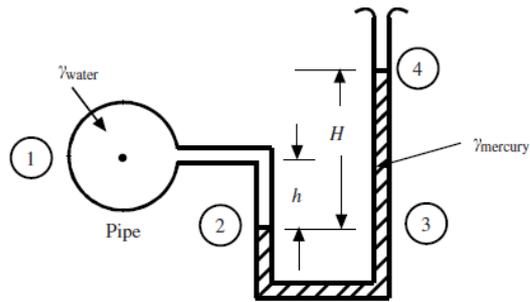


Fig.2.11a:

Manomètre en U utilisant de l'eau et du mercure

On a:  $P_2 = P_3$  (même liquide même plan horizontal)

- Partie gauche:  $P_2 = P_1 + \rho_{eau}gh$
- Partie de droite:  $P_3 = P_4 + \rho_{Hg}gH = P_{atm} + \rho_{Hg}gH$
- Puisque l'on mesure une pression manométrique, on soustrait  $P_{atm}$  et donc  $P_3 = \rho_{Hg}gH$

et comme  $P_2 = P_3$  alors

$$P_1 + \rho_{eau}gh = \rho_{Hg}gH \text{ et}$$

$$P_1 = \rho_{Hg}gH - \rho_{eau}gh \quad (2.6)$$

Si au lieu de l'eau, on a un fluide de densité  $\rho$  (un gaz par exemple), sa densité est négligeable devant celle du liquide manométrique:

$$\rho_{Hg} \gg \rho \text{ alors}$$

$$P_1 = \rho_{Hg}gH \quad (2.7)$$

La lecture simple de  $H$  permet d'estimer  $P_1$ .

Un manomètre est donc un instrument qui utilise une colonne de fluide pour mesurer la pression, plus particulièrement pour mesurer la pression relative.

**Remarque : La capsule manométrique**

Pour mesurer une pression, on peut se servir d'une capsule manométrique, raccordée à un manomètre en U :

Lorsque des forces pressantes s'exercent sur la membrane en caoutchouc, l'air contenue dans le tube de raccordement est comprimée et provoque une dénivellation ( $h$ ) du liquide dans le tube en U. La pression  $P$  est proportionnelle à cette dénivellation :  $P \propto h$

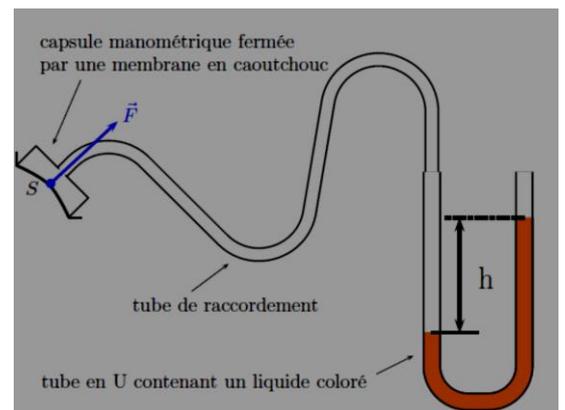


Fig.2.11b: Capsule manométrique et manomètre en U

**Exercice:** Donner l'expression de la différence de pression entre A et B de la (Fig.2.12) suivant

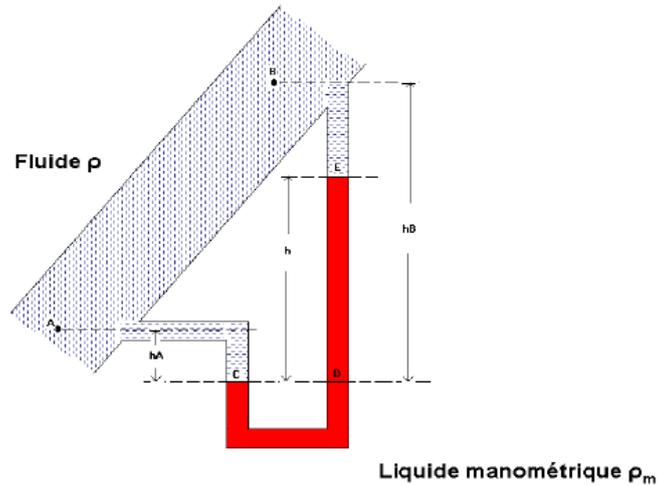


Fig. 2.13: Mesure de différence de pression avec un tube manométrique

**j. Surface de séparation de 2 liquides non miscibles**

On suppose ici que la surface de séparation des 2 liquides n'est pas horizontale

Pour le liquide 1 on a:  $P_B - P_A = \rho_1 g h$  1

Pour le liquide 2 on a:  $P_B - P_A = \rho_2 g h$  2

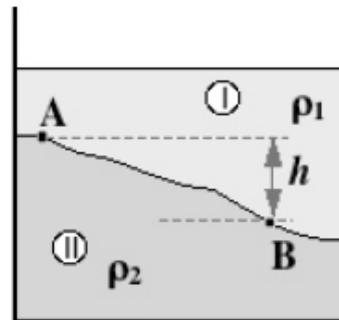


Fig. 2.16: surface de séparation de 2 liquides non miscibles

1 = 2 soit:  $\rho_1 g h = \rho_2 g h \Rightarrow g h (\rho_1 - \rho_2) = 0$  alors, soit  $\rho_1 = \rho_2$  et il s'agit du même liquide

soit  $h = 0$  et la surface de pression est horizontale

**k. Tube en U: Densimètre**

Un tube en U (Fig. 2.17) contient 2 liquides non miscibles

Dans la branche de gauche :  $P_B = P_A + \rho_1 g h_1$

Dans la branche de droite :  $P_{B'} = P_C + \rho_2 g h_2$

Mais  $P_A = P_C = P_{atm}$  et  $P_B = P_{B'}$  car B et B' dans le même plan horizontal

et même liquide. Donc en définitive,

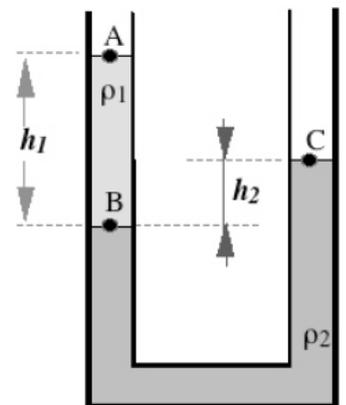


Fig.2.17: Densimètre

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

On peut donc se servir de cette méthode pour mesurer la densité d'un fluide connaissant les trois autres données.

### I. Siphon

Il s'agit (voir Fig.2.17) de 2 cuves séparées par une hauteur  $h$  et d'un tube reliant les deux cuves et **contenant le même liquide** que les cuves. Nous allons démontrer que le fluide va nécessairement s'écouler jusqu'à ce que le tube soit vide.

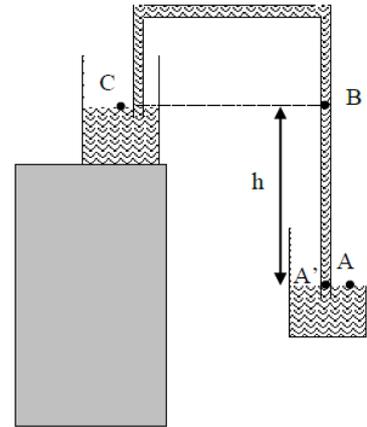


Fig.2.18: Principe du siphon

Autrement dit les lois de l'hydrostatique ne sont pas vérifiées.

Dans la branche de droite :  $P_{A'} = P_B + \rho gh$

Dans la branche de gauche :  $P_C = P_{atm}$

Mais :  $P_B = P_{atm}$  et  $P_{A'} = P_A = P_{atm}$  même liquide et même plan horizontal donc finalement  $\rho gh = 0$  soit  $\rho gh = 0$  ce qui est impossible. Il y a donc forcément mouvement dans le sens de ramener  $h$  à zéro.

**Exemple:** Méthode appliquée par les vendeurs de KPAYO

### 2.5 Transmission des pressions :

#### a. Autre conséquence du théorème de Pascal

Pour deux niveaux distincts dans un fluide en équilibre,  $P_B - P_A = cst.$  Donc toute variation intervenue à l'un des niveaux est directement répercutée à l'autre. Il n'en est pas de même pour les solides

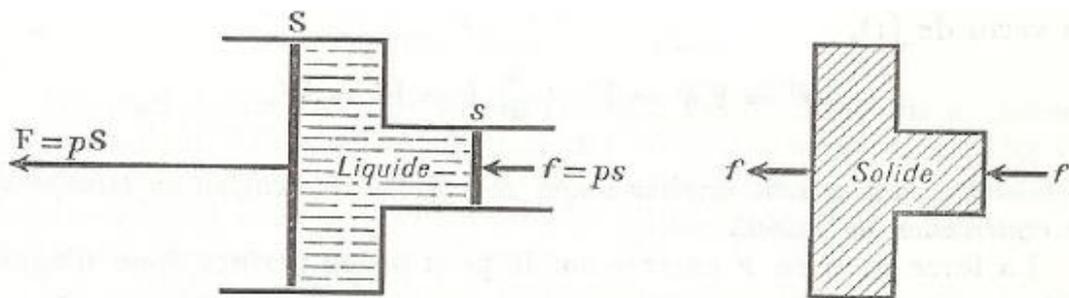


Fig.2.19: Transmission intégrale de pression par les fluides et non pour les solides

Les fluides **transmettent intégralement les pressions**. Cette propriété permet de décupler des forces. Par exemple si on applique une petite force  $f = Ps$  sur le petit piston, on récupère une force  $F = PS$  plus grande à la sortie du grand piston mais **la pression est la même**.

**b. Application :Presses hydrostatique**

Cette propriété est utilisée dans les presses hydrostatique pour soulever des charges importantes avec des charges moins importantes. Une presse hydrostatique est constituée de deux cylindres verticaux communiquant à leur base par un tube.

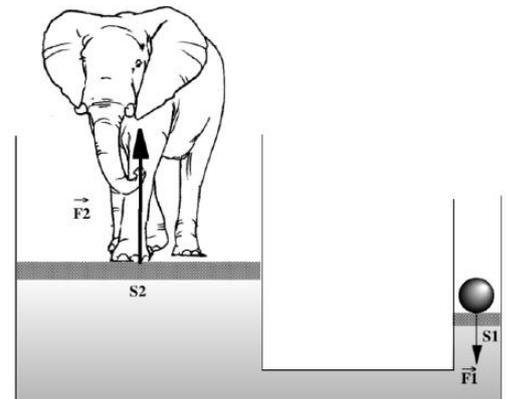


Fig.2.20: Presse hydrostatique

Ces cylindres sont fermés par deux plateaux mobiles

( $P_1$  et  $P_2$ ) reposant sans frottement sur le liquide de transmission. (Voir Fig. 2.20).

On a la relation:

$$(2.12) \quad P = F_2/S_2 = F_1/S_1 = cte \quad (2.12)$$

**2.6 Forces de pression sur un corps (poussée d'Archimède) (SI2 uniquement)**

On s'intéresse à la résultante des forces de pression sur un corps immergé dans un liquide. La somme des forces de pression est l'intégrale des forces élémentaires  $d\vec{f}_n = -P\vec{n}ds$  (Voir 2.1) soit encore:

$$\vec{F} = \int_s -P\vec{n}ds \quad (2.13)$$

Cette intégrale se calcule assez facilement si la forme du corps est simple. Sur l'exemple de la (Fig.2.5), la résultante  $F$  s'écrit:

$$F = F_z - F'_z = (P_z - P'_z)dxdy = \rho g dxdydz \text{ et finalement } F = \rho g dV$$

De façon générale, on a :

**Théorème d'Archimède:**

**Les forces de pression qu'exerce un système de fluides en équilibre sur un solide immergé admettent comme résultante une force de sens bas vers le haut appelée poussée d'Archimède, égale et opposée au poids de volumes de fluides déplacés. La poussée d' Archimède est donc verticale, dirigée vers le haut et son support passe par le centre de gravité C des fluides déplacés (centre de poussée) qui n'est pas forcément le même que celui du solide.**

**2.6.1 Application : Détermination d'une masse volumique**

Exercice : Un corps dont le volume est de  $200 \text{ dm}^3$  a un poids  $P = 2220 \text{ N}$ . Lorsqu'il est complètement immergé dans un liquide, le dynamomètre auquel il est suspendu indique un poids apparent  $P_a = 820 \text{ N}$ . Calculer la masse volumique du liquide.

### 2.6.2 : Fraction immergée d'un Iceberg

Exercice : Calculer la fraction immergée du volume total  $V$  d'un iceberg sachant que la masse volumique de la mer est  $\rho_m = 1025 \text{ kg/m}^3$  et celle de la glace est  $\rho_g = 920 \text{ kg/m}^3$ .

### 2.6.3 Notion de Flottabilité

Nous savons que lorsqu'un corps est plongé dans un fluide, il est soumis principalement son poids  $\vec{P}$  dirigé suivant la verticale descendante et la poussée d'Archimède  $\vec{F}$  dirigée suivant la verticale ascendante.

- ☞ Si  $\vec{P} > \vec{F}$  alors le corps aura tendance à couler.
- ☞ Si  $\vec{P} < \vec{F}$  alors le corps surnage poussé vers la surface libre par la poussée d'Archimède.
- ☞ Si  $\vec{P} = \vec{F}$  alors le corps flotte entre deux eaux.

**Exemple :** Une plongeuse de 64 kg pour un volume de 68 litres se prépare à plonger dans un lac (eau douce 1 litre = 1kg). Elle s'équipe d'une combinaison d'une combinaison de 5 mm d'un volume de 6 litres pour un poids de 2 kg, d'un bloc de 12 litres pesant 16 kg.

- 1<sup>ère</sup> étape : elle se met à l'eau
- 2<sup>ème</sup> étape : elle rajoute une ceinture de lest de 4 kg
- 3<sup>ème</sup> étape : elle rajoute une seconde ceinture de lest de 2 kg.

### 2.6.4 : Ballon gonflé à l'Hélium (Montgolfière)

Un ballon gonflé avec un gaz plus léger que l'air, soit par exemple de l'Hélium de masse volumique  $\rho_H = 0,178 \text{ kg/m}^3$ , a un volume  $V = 100 \text{ litres}$ . Quel poids  $P_s$  peut-il soulever sachant que la masse volumique de l'air est  $\rho_a = 1,29 \text{ kg/m}^3$ ? En déduire la masse en grammes accrochée. Quel volume faudra-t-il pour soulever une masse de 100 kg? Quel pourrait-être le rayon d'un tel ballon ?

### 2.6.5 Applications : Force sur une surface plane inclinée

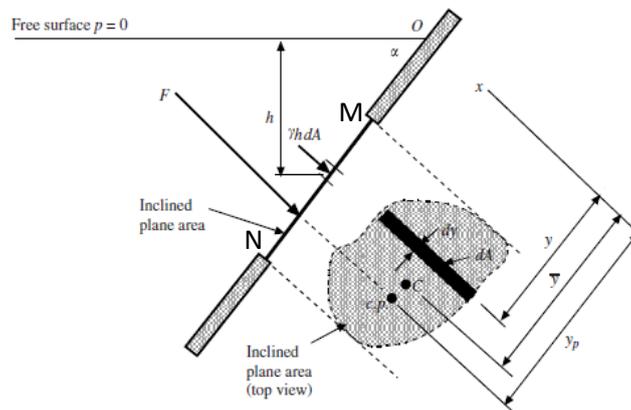


Fig.2.21 : Force sur une surface inclinée

Soit une surface plane MN inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale et immergée dans un fluide de densité massique  $\rho$  et C son centre de gravité. Etablissons l'expression de la force résultante  $F$  des forces exercées par le fluide sur la surface MN. Considérons pour cela la force élémentaire  $dF$  s'exerçant sur une surface élémentaire  $dS$ :

$$dF = p dS = (P_{atm} + \gamma h) dS = P_{atm} dS + \gamma h dS = P_{atm} dS + \rho g h dS$$

La force résultante  $F$  est égale à l'intégrale de  $dF$  sur toute la surface MN:

$$F = \int_{MN} dF = \int_{MN} P_{atm} dS + \int_{MN} \rho g h dS$$

or  $h = y \sin \alpha$  d'où:

$$F = P_{atm} S + \int_{MN} \rho g y \sin \alpha dS = P_{atm} S + \rho g \sin \alpha \int_{MN} y dS$$

Le terme  $\int_{MN} y dS$  est le "**Moment Statique**" de la surface MN par rapport à OX:

$\int_{MN} y dS = \bar{y} S$  où  $\bar{y}$  est l'ordonnée du centre de gravité de la surface MN. Finalement, on obtient :

$$F = P_{atm} S + \rho g \bar{y} S \sin \alpha \quad (2.14)$$

Mais  $\bar{y} \sin \alpha = h$ : Profondeur du centre de gravité, donc

$$F = P_{atm} S + \rho g h S \quad (2.15)$$

Si on néglige la pression atmosphérique (mesure de pression manométrique) alors :

$$F = \rho g h S \quad (2.16)$$

Nous allons nous intéresser dans la suite à la détermination du point d'application de cette Force de pression.

Déterminons  $h_p$  la profondeur de la force de pression. Par le principe des moments, on a :

$$M_o F = \sum_{MN} M_i$$

avec  $M_o F = F \cdot y_p$  et

$$\sum_{MN} M_i = \int_{MN} y dF = \int_{MN} y \cdot \rho g y \sin \alpha \cdot dS = \int_{MN} \rho g y^2 \sin \alpha \cdot dS = \rho g \sin \alpha \int_{MN} y^2 dS$$

Le terme  $\int_{MN} y^2 dS = I_{OX}$  représente le "**Moment d'Inertie**" de la surface MN par rapport à l'axe OX

On aura donc:  $\rho g S \bar{y} y_p \sin \alpha = \rho g I_{OX} \sin \alpha$  et donc:

$$y_p = \frac{I_{OX}}{\bar{y} S} \quad (2.17)$$

**Remarque** : Utilisation du théorème de Huygens

$$I_{OX} = I_{CC} + \bar{y}^2 S$$

$I_{CC}$  Moment d'inertie de la surface MN par rapport à l'axe passant par le centre de gravité C.

Dans ce cas, la formule précédente devient :

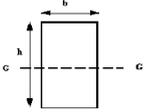
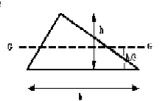
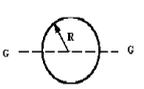
$$y_p = \bar{y} + \frac{I_{CC}}{\bar{y} S} \quad (2.18)$$

Cette formule permet de localiser le point d'application de la force.

Pour une surface horizontale, la pression est uniforme à travers la surface de sorte que la force de pression agit au centre de gravité de la surface. En général,  $y_p$  est plus grand que  $\bar{y}$ . Le point d'application de la force est sur la verticale du centre de gravité mais en dessous de lui. La profondeur de la profondeur ou ce qu'il conviendrait d'appeler la dénivellation par rapport à la surface libre du fluide est donnée par

$$h_p = y_p \sin \alpha \quad (2.19)$$

Tableau des moments d'inertie de quelques figures géométriques simple.

Type	Surface	Moment d'Inertie $I_{CC}$
<b>Rectangle</b> 	$bh$	$\frac{bh^3}{12}$
<b>Triangle</b> 	$\frac{bh}{2}$	$\frac{bh^3}{36}$
<b>Cercle</b> 	$\pi R^2$	$\frac{\pi R^4}{4}$

On vérifiera que, dans le cas d'une paroi rectangulaire verticale de hauteur H, dont le centre de gravité est situé à la profondeur  $H/2$ , le centre de poussée est situé à la profondeur  $2H/3$ . Pour localiser la coordonnée  $x_p$  du centre de poussée, on écrit

$$x_p F = \rho g \sin \alpha \int_A xy dA = \rho g I_{xy} \sin \alpha$$

ou  $I_{xy}$  est le produit des moments d'inertie par rapport aux axes x et y. On montre aussi avec l'aide du théorème de Huygens que:

$$x_p = \bar{x} + \frac{I_{xy}}{\bar{y}A} \quad (2.20)$$

### 2.6.6 Applications: Force sur une surface plane verticale

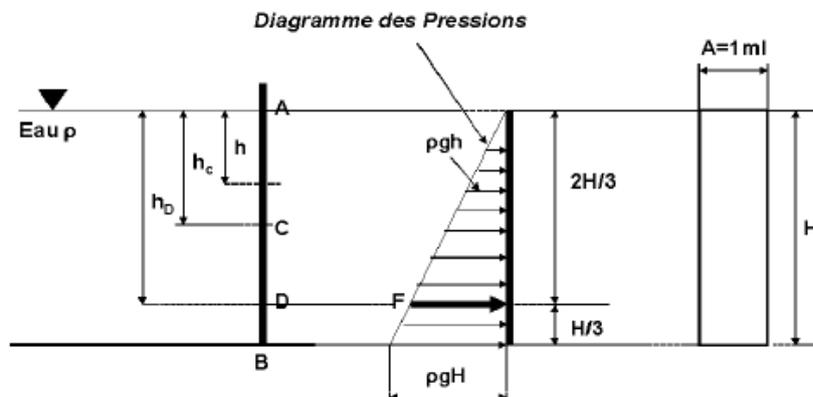


Fig.2.22: Force sur une surface verticale

Soit une plaque AB plane verticale retenant une hauteur H d'eau. Le schéma représente le diagramme des pressions exercées sur la surface AB.

Le diagramme de pression est représentée par un triangle dont la surface est égale à la résultante des forces de pressions:

$$F = \frac{\rho g H \cdot H}{2} = \frac{1}{2} \rho g H^2 \quad (2.21)$$

**Remarques:**

- ☞ Ici la largeur est prise égale à 1 unité. Donc dans la réalité, on devra multiplier le résultat (2.22) par la longueur  $l$ .
- ☞ La force s'applique dans ce cas au centre de gravité donc:

$$y_P = \frac{2}{3} H \quad (2.22)$$

**2.6.7 Notion de stabilité d'un barrage poids**

Considérons le barrage schématisé sur la figure (2.23).

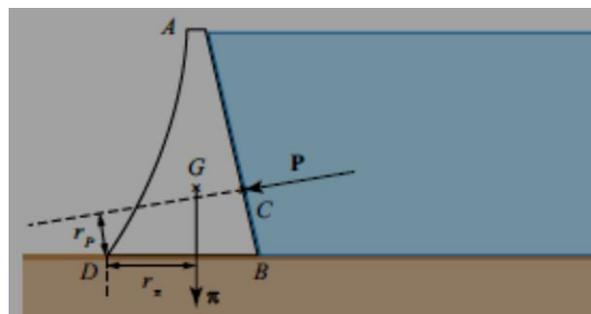


Fig.2.20 : Illustration de la condition de stabilité d'un barrage poids, soumis à son poids  $\pi$  appliqué en son centre de gravité  $G$  et à la poussée de l'eau  $P$  sur son parement amont, appliquée au centre de poussée  $C$ . La réaction du sol sur le barrage n'est pas représentée.

Admettons que le niveau de l'eau dans la retenue atteigne la hauteur maximale possible et arrive jusqu'au sommet  $A$ .

La poussée de l'eau  $P$  est perpendiculaire au parement amont  $AB$  appliquée au point  $C$ . Par ailleurs, le poids du barrage lui-même, dénoté  $\pi$ , dirigé dans le sens de la verticale descendante, est appliqué au centre de gravité du barrage ( $G$ ). La stabilité de cet ouvrage requiert que le moment de la poussée  $P$  par rapport à tout axe horizontal soit toujours compensé par le moment du poids  $\pi$ .

L'axe le plus dangereux est celui qui passe par le point  $D$ , opposé du point  $B$  à la base du barrage, puisque le moment de la poussée  $P$ , qui s'écrit  $+|P|r_p$ , peut avoir le signe du basculement sans être compensé par la réaction du sol. La condition de stabilité exige donc que le moment du poids  $\pi$  par rapport à l'axe passant par  $D$ , à savoir  $-|\pi|r_\pi$  toujours dans le sens de redressement, soit suffisant pour compenser l'éventuel moment de basculement de la poussée. Il apparaît qu'il existe une pente limite du parement amont, au-dessus de laquelle le bras de levier  $r_p$  devient négatif. Dans ce cas, qui correspond aux pentes faibles, la poussée de l'eau ne risque en aucun cas de faire basculer le barrage.

**2.6.8 Applications: Force sur une surface courbe**

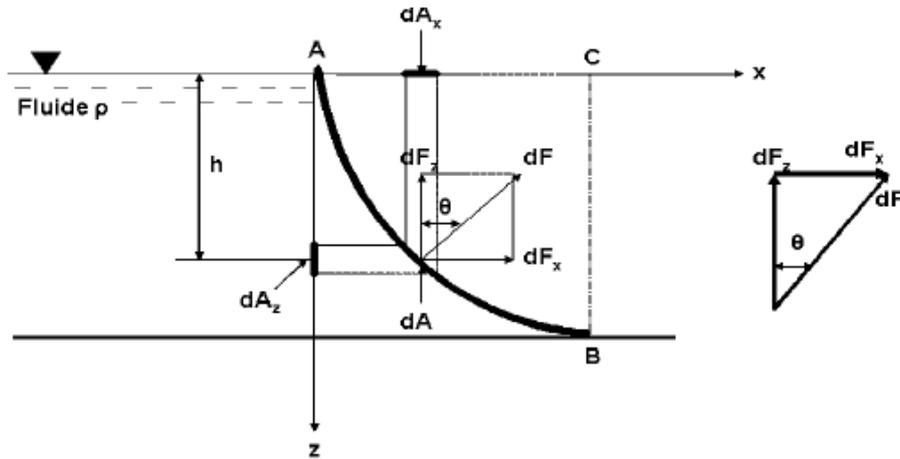


Fig.2.21: Force sur une surface courbe

Soit une paroi courbe AB retenant un fluide de densité massique  $\rho$ .

Soit un élément  $dA$  de la surface AB situé à une profondeur  $h$  et sur lequel s'exerce une force élémentaire  $dF$  qui se décompose en 2 forces:

- Une force  $dF_x$  agissant sur la surface  $dA_z$  projection de  $dA$  sur l'axe  $z$ .
- Une force  $dF_z$  agissant sur la surface  $dA_x$  projection de  $dA$  sur l'axe  $x$ .

On sait que  $dF = \rho g h dA$  d'où:

$$dF_x = dF \cdot \sin\theta = \rho g h dA \cdot \sin\theta = \rho g h dA_z$$

$$dF_z = dF \cdot \cos\theta = \rho g h dA \cdot \cos\theta = \rho g h dA_x$$

d'où:

$$F_H = \int_{A_z} dF_x = \rho g \int_{A_z} h dA_z = \rho g h A_z$$

d'où:

$$F_H = \rho g h A_z \quad (2.23)$$

**Conclusion:** Le calcul de la composante horizontale  $F_H$  est ramené au calcul d'une force de pression sur une surface verticale.

De même:

$$F_z = \int_{A_x} dF_z = \rho g \int_{A_x} h dA_x = \rho g h A_x$$

d'où:

$$F_V = F_z + W = \rho g h A_x + W \quad (2.24)$$

Avec  $W$ : volume délimité par:

- La surface courbe AB
- La surface libre du fluide
- Les 2 verticales menées des deux extrémités A et B de la surface.

Le calcul des deux composantes  $F_V$  et  $F_H$  permet ensuite de déterminer la résultante  $F$  par l'expression suivante:

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_V^2} \quad (2.25)$$

### Position du point d'application de la Force de pression

Le point d'application de la résultante  $F$  est obtenu si l'on connaît les composantes  $F_V$  et  $F_H$ . Dans le cas général, il faudra établir l'équation de la courbe AB et celle du segment représentant la force  $F$  ( équation d'une droite ) en tenant compte que l'angle d'inclinaison de la force résultante  $F$  par rapport à la verticale est obtenu par la formule suivante :

$$\theta = \arctan \frac{F_H}{F_V}$$

**Résumé :** En pratique, le but est de modeler la force créée par la pression avec une force équivalente (2.26) appliquée au centre de pression.

Une approche facile, est d'analyser les forces dans le diagramme du corps-libre.

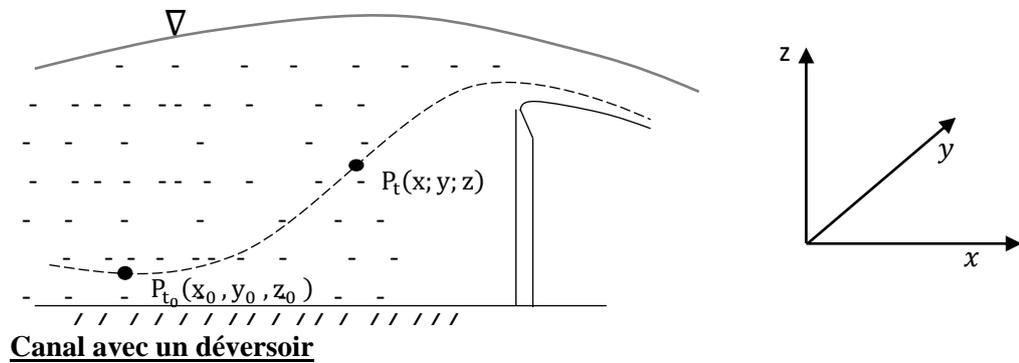
## Chapitre 3 : CINEMATIQUE DES FLUIDES OU HYDROCINEMATIQUE

### 1- Mouvement d'un fluide

Le mouvement d'un fluide est repérable au moyen de variables adéquates. Deux méthodes sont considérées : **les variables de LAGRANGE** et **les variables d'EULER**.

- La méthode de LAGRANGE consiste à suivre une particule dans son mouvement.
- La méthode d'EULER consiste à observer la vitesse des particules passant en un point déterminé de l'espace.

#### 1.1- méthode de LAGRANGE



Considérons un canal avec un déversoir rempli d'eau. A un instant initial  $t_0$ , on isole à l'intérieur d'une masse fluide une particule fixée de coordonnées  $P_{t_0}(x_0, y_0, z_0)$  et on la suit dans ses mouvements. La position cette particule  $P_t(x, y, z)$  au cours du temps est définie à partir des variables indépendantes  $x_0, y_0, z_0$  et  $t$  par la fonction suivante

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(x_0, y_0, z_0, t) \\ y &= f_2(x_0, y_0, z_0, t) \\ z &= f_3(x_0, y_0, z_0, t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

**Ce sont les variables de LAGRANGE**

- Les positions successives de cette particule fluide au cours du temps décrivent une courbe qu'on appelle trajectoire. On l'obtient expérimentalement en emmergeant dans le fluide des granulés colorants de même densité que lui. Chaque granulé dessine alors la trajectoire de la particule fluide qui le contient.
- Les vitesses et les accélérations correspondantes sont déterminés par les relations suivantes :

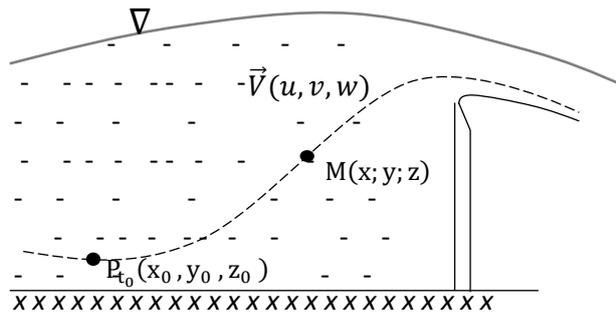
$$\vec{V} \left( u = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial z}{\partial t} \right) \quad (2)$$

$$\vec{\gamma} \left( \gamma_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \gamma_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \gamma_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \right)$$

Par la méthode de Lagrange on étudie chaque particule fluide individuellement en suivant son mouvement. Cependant, dans beaucoup de cas pratique il n'est pas très important de connaître la trajectoire de chaque particule.

En considérant le fluide comme un milieu déformable et continu, l'intérêt majeur ne se porte pas sur l'évolution d'une particule fluide distincte, mais plutôt sur la propriété de l'écoulement en certains points déterminés, c'est-à-dire dans le champ des vitesses. Il est alors plus intéressant de connaître la vitesse en un point donné ; on y parvient au moyen des variables d'EULER.

## 1.2 – Méthode d'EULER



**Canal avec un déversoir**

En un point  $M(x, y, z)$  situé à l'intérieure d'une masse fluide en mouvement, la vitesse  $\vec{V}(u, v, w)$  d'une particule fluide à chaque instant peut être obtenue à partir des variables indépendantes  $x, y, z, t$  par les fonctions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} u &= g_1(x, y, z, t) \\ v &= g_2(x, y, z, t) \\ w &= g_3(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Ce sont là les variables d'EULER.

On détermine alors, en fonction du temps  $t$ , la vitesse  $\vec{V}$  des particules fluides qui passent successivement par ce point M.

La variable totale de vitesse selon  $x$  est ensuite donné par :

$$\boxed{du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz} \quad (4)$$

Avec

$$dx = u dt$$

$$dy = v dt$$

$$dz = w dt$$

L'accélération suivant  $x$  est alors obtenue de la façon suivante :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}} \quad (5)$$

Soit, pour le vecteur vitesse  $\vec{V}(u, v, w)$  :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Soit

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Ou vectoriellement :

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V}} \quad (5a)$$

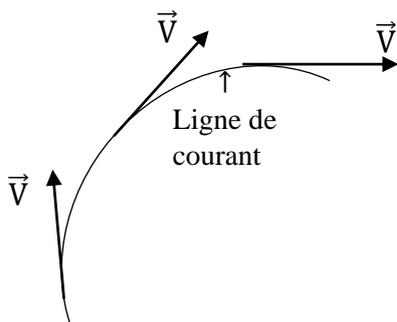
$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
 accélération      accélération      accélération  
**totale**              **locale**              **convective**

Donc l'accélération totale est la somme d'une accélération locale et d'une accélération conservative.

A cet instant précis, on peut dessiner en chaque point de l'espace un vecteur représentant la vitesse en ce point et à cet instant. L'ensemble de ces vecteurs est appelé **champ des vitesses**.

En raison de la simplicité de la méthode d'Euler qui est plus fréquemment utilisée, elle sera uniquement considérée dans suite de ce cours.

### 1.3- Lignes de courant

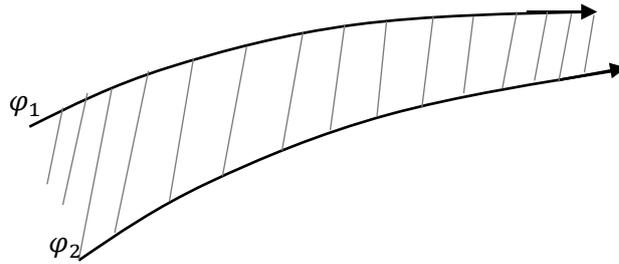


Une ligne tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse  $\vec{V}$  à l'instant considéré est appelée **ligne de courant**.

- Les lignes de courant changent d'un instant à un autre. Mais dans un écoulement permanent, ces lignes de courant ne varient pas et coïncident avec les trajectoires.
- Les lignes de courant satisfont aux équations différentielles suivantes :

$$\boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}} \quad (6)$$

- Un volume de fluide limité par des lignes de de courant s'appuyant sur une courbe fermée est appelée **tube de courant** (voir figure suivante) :

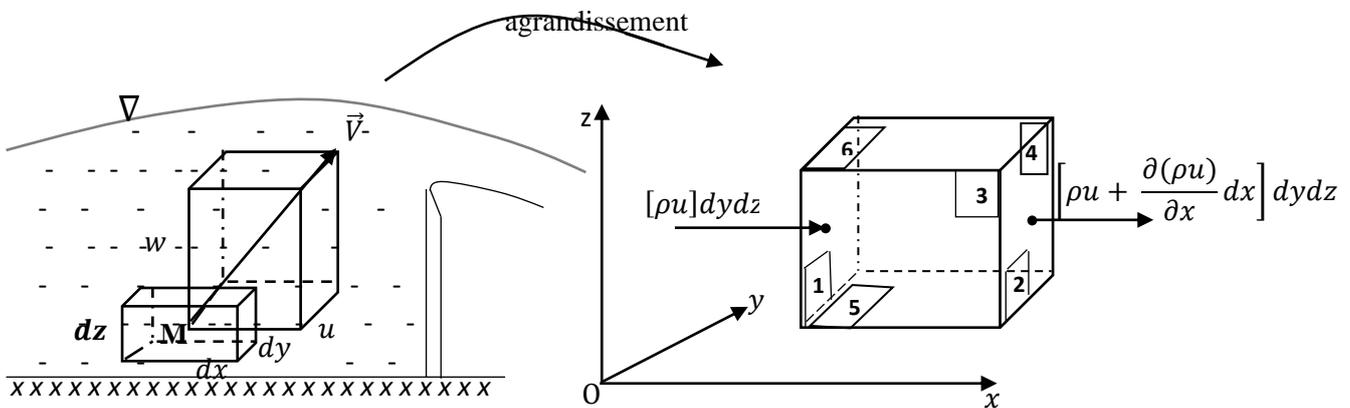


## 2- Equation de continuité et Fonction de courant

### 2.1 Equation de continuité

L'équation de continuité est une **équation fondamentale de la mécanique des fluides**, qui exprime le **principe de conservation de masse**.

#### 2.1.1 Etablissement de l'équation de continuité



Soit le volume du parallélépipède élémentaire  $dx dy dz$  centré au point M (voir figure ci-dessus).

La masse fluide contenue dans ce volume, qui était au temps  $t$  :  $(\rho) dx dy dz$  est devenue après un certain intervalle de temps  $dt$

$$\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dx dy dz$$

On constate une variation de cette masse de :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt \quad (7)$$

- Par ailleurs, la différence des masses fluides entrant par la face (1) et sortant par la face (2) pendant l'intervalle de temps  $dt$  est donnée en utilisant la définition  $u = \frac{dx}{dt}$  par :

$$[\rho u] dx dy dz dt - \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx\right] dy dz dt = - \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\right] dx dy dz dt$$

En procédant de façon analogue pour les faces opposées (3) et (4) ainsi que pour les faces (5) et (6) on obtient respectivement :

$$- \left[\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\right] dx dy dz dt \quad \text{et} \quad - \left[\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dx dy dz dt$$

Alors la somme des masses fluides qui entrent dans le parallélépipède diminué de celles qui en sortent set :

$$-\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dx dy dz dt \quad (8)$$

En exprimant que (7) = (8), il vient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt = -\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] dx dy dz dt$$

en divisant par  $dx dy dz dt$ , on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]$$

Ce qui donne finalement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right] = 0 \quad (9)$$

Ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

C'est l'équation de continuité générale dans le cas où le flux est conservatif.

En supposant qu'il existe à l'intérieur du parallélépipède ( $dx dy dz dt$ ) des sources ou des puits qui débitent une masse pendant l'intervalle de temps  $dt$  on a :

$$(\rho q_s) dx dy dz dt$$

Où  $q_s$  est le débit par unité de volume, positif pour une source et négatif pour un puits.

Dans ce cas, l'équation (9) devient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = \rho q_s \quad (9a)$$

C'est l'équation de continuité pour un écoulement non conservatif.

### 2.1.2. Cas particuliers

- Si le fluide est en mouvement permanent et conservatif, la masse volumique  $\rho$  est indépendante du temps ; l'équation (9) devient :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

Ou

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (10)$$

Car  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

- Dans le cas d'un fluide incompressible, la masse volumique  $\rho$  est constante et l'équation (10) devient :

$$\rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0$$

Ou

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (10a)$$

Où  $\vec{V}(u, v, w)$  est le vecteur vitesse.

Par exemple pour l'écoulement plan en  $xy$ ,  $\vec{V}(u, v, 0)$  et (10a) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (10b)$$

- En considérant  $dx dy dz = dv$  un volume élémentaire,

$$\int_v \nabla \cdot \vec{V} dv = 0 \quad \text{compte tenu de l'équation (10a).}$$

Selon le théorème de Gauss, on peut transformer une intégrale de volume en intégrale de surface fermée :

$$\int_v \nabla \cdot \vec{V} dv = \oint_S \mathbf{V}_P dS = 0 \quad (11)$$

Où  $V_P$  est la composante de la vitesse qui est perpendiculaire à la surface de volume.

Donc pour un fluide incompressible, l'interprétation physique de l'équation (11) est la suivante : **les débits entrant et sortant à travers une surface quelconque fermée doivent être égaux.**

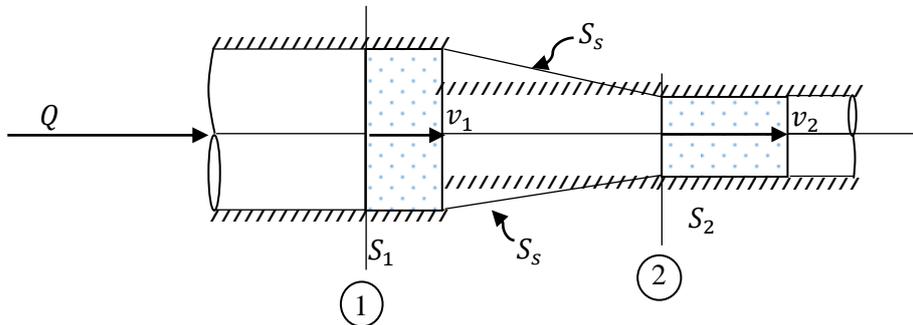
Par définition, le débit total  $Q$  traversant une surface est donnée par :

$$\oint_S \mathbf{V}_P dS = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} = Q \quad (12)$$

Où  $U$  est la vitesse moyenne sur cette surface  $S$ .

**Note :** l'équation (11) est d'une grande utilité en hydrodynamique.

- Considérons un courant fluide, un tube de courant de dimension finie, voir figure suivante :



On prend ici une conduite de section variable,  $S_1$  et  $S_2$  limitée par des parois solides  $S_s$ .

Selon l'équation (11), le débit  $Q$  passant au travers les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  est égal à zéro.

Considérons le débit sortant comme positif et celui entrant comme négatif, on écrit :

$$-Q_1 \pm Q_s + Q_2 = 0$$

$$\Rightarrow U_1 S_1 \pm U_s Q_s + U_2 S_2 = 0$$

Or  $Q_s = 0$  car il n'y a pas de débit passant au travers des parois solides ; on en déduit

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

$$\Rightarrow U_1 S_1 = U_2 S_2$$

## 2.2. Fonction de courant

Pour un écoulement plan en  $xy$  par exemple, permanent et incompressible, l'équation (6) devient :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad \Rightarrow \quad u dx = v dy$$

$$u dx - v dy = 0 \quad (13)$$

donc le plan  $xy$ , les lignes de courant satisfont à la condition (13).

Supposons qu'il existe une fonction  $\varphi(x, y)$  de façon à avoir en chaque point du plan :

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

La fonction  $\varphi$  ainsi est définie est appelée fonction de courant

En substituant (14) dans (13) on obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = d\varphi = 0 \quad (15)$$

La différentielle totale  $d\varphi$  est donc nulle, par conséquent :

$$d\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \text{cte} \quad (15a)$$

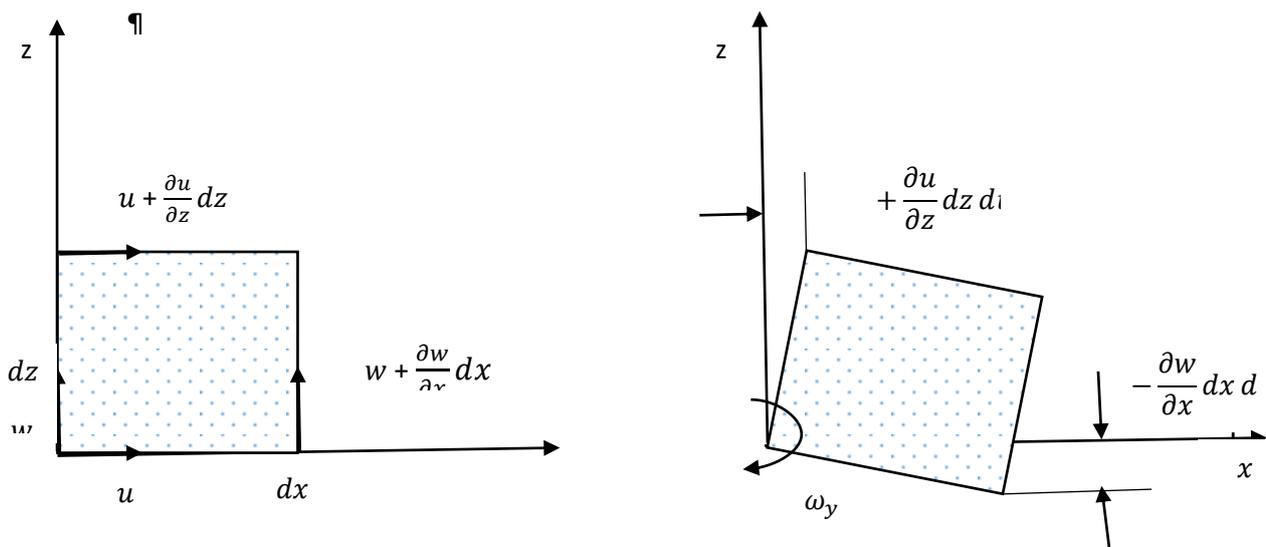
Le long d'une ligne de courant de l'écoulement.

### 3. Ecoulement irrotationnel et Potentiel des vitesses

#### 3.1. Ecoulement irrotationnel

##### 3.1.1 Rotation

Pour simplifier l'étude, on traite ici le cas d'un écoulement fluide dans le plan  $xz$  et l'on isole un élément fluide de section  $dx dz$  qui subit ensuite une rotation pendant un temps  $dt$  ( voir figure ci-après



Le taux de rotation de cet élément fluide  $dx dz$  autour d'un axe passant par  $y$ , en considérant comme positif le sens des aiguilles d'une montre, peut être exprimé en fonction des vitesses  $u$  et  $v$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz \text{ et } \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx.$$

Alors le taux de rotation de la face  $dx$  est :

$$\frac{- \left[ w + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + w \right]}{dx} = - \frac{\partial w}{\partial x}$$

Et de la place  $dz$  :

$$\frac{+ \left[ w + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz - u \right]}{dz} = + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Le taux net de rotation de cet élément fluide  $dx dz$  autour de l'axe  $y$  représente la moyenne de rotation des faces  $dx$  et  $dz$  ; on le définit alors ainsi :

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (16)$$

En procédant de façon analogue pour les deux autres sections  $dx dy$  et  $dy dz$  , on obtient le vecteur tourbillon ou vorticité du champ des vitesses :

$$\vec{\Omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} = \frac{1}{2} \nabla \Lambda \vec{V}$$

$$\nabla \Lambda \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

$$= \oplus \vec{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v & w \end{vmatrix} \ominus \vec{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & w \end{vmatrix} \oplus \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ u & v \end{vmatrix}$$

$$\frac{1}{2} \nabla \Lambda \vec{V} = \vec{i} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \vec{j} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \vec{k} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

$$\text{D'où} \begin{cases} w_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ w_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ w_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{cases}$$

### 3.1.2. Irrotationalité

Les écoulements pour lesquels le vecteur tourbillon est nul en tout point :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} = \vec{0} \quad (17)$$

Sont appelés écoulements irrotationnels

Pour l'écoulement plan en  $xy$ , l'équation (17) devient :

$$w_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad (16a)$$

$$\text{Ce qui donne : } \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (18)$$

Les écoulements irrotationnels jouent un rôle important dans l'hydrodynamique.

### 3.1.3. Circulation

Pour un écoulement plan en  $xz$  , avec la relation donnée par l'équation (16) du vecteur tourbillon  $w_y$  , on définit :

$$2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dx dz = d\Gamma$$

Et après intégration, on obtient :

$$\Gamma = \int_s 2w_y dx dz \quad (19)$$

Le flux du vecteur tourbillon à travers une surface S ouverte quelconque est égal à la circulation du vecteur vitesse le long du contour C sur lequel cette surface s'appuie : c'est le théorème de Stokes.

Pour l'écoulement plan en  $xz$ , il se traduit par :

$$\int_S 2w_y dx dz = \Gamma = \int_C (u dx + w dz)$$

Pour les écoulements irrotationnels, la circulation est évidemment nulle :

$$\Gamma = 0 \quad (20)$$

### 3.2. Potentiel des vitesses

Dans un écoulement irrotationnel où le vecteur tourbillon (éq. (17)) est nul, la vitesse  $\vec{V}$  peut être exprimée par une fonction  $\Phi$  appelée **potentiel des vitesses**, telle que :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$$

sont les trois composantes sont :

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (21)$$

Un tel écoulement est dit **écoulement à potentiel des vitesses** ou plus brièvement **écoulement potentiel**

Les surfaces ou lignes équipotentielles sont telles que la fonction  $\Phi$  conserve la même valeur en tout point de chacune d'elles. Les équipotentielles sont données par :

$$\Phi(x, y, z) = cte \quad \text{ou} \quad \Phi(x, z) = cte$$

Pour un fluide parfait incompressible et conservatif, l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{div} \vec{V} = 0) \quad (10a)$$

Lorsqu'il existe un potentiel des vitesses, l'écoulement est irrotationnel et, compte tenu des équations (21), l'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{ou}$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}} \Phi) = 0 \Rightarrow \Delta \Phi = 0 \quad (22)$$

Par conséquent, un tel écoulement irrotationnel satisfait l'équation de Laplace,  $\nabla^2 \Phi = 0$  ; **la fonction est donc harmonique.**

# Chapitre 4 Dynamique des fluides ou Hydrodynamique

## Introduction

Nous allons à présent étudier les fluides lorsqu'ils sont en mouvement. Dans ce chapitre, nous allons nous limiter aux fluides parfaits, c'est à dire aux fluides qui ont une viscosité nulle. Cela veut dire qu'aucune force de frottement n'existe au sein de ce fluide en mouvement.

Nous considérerons aussi que ce fluide est incompressible. Nous étudierons le régime permanent (stationnaire).

### 3.1 Equation de Bernoulli

*Equation de Bernoulli = conservation de l'énergie*

Rappels de mécanique:

Travail des forces extérieures = Variation de l'énergie cinétique (théorème de l'énergie cinétique)

C'est la traduction pour un fluide du théorème de l'énergie cinétique qui est l'équation de Bernoulli. Nous allons l'exprimer dans le cas d'un fluide isovolume, non visqueux, en régime permanent.

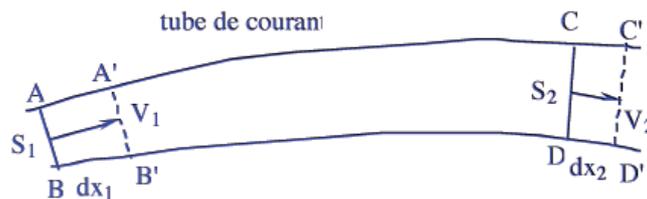


Fig 3.6: Tube de courant élémentaire pour démontrer le théorème de Bernoulli

Si un volume fluide contenu à l'instant  $t$  dans le tube de courant entre les sections AB et CD. A l'instant ultérieur  $t + dt$  ce volume sera compris entre A'B' et C'D'.

L'équation de continuité s'écrit:  $S_1 dx_1 = S_2 dx_2 = d\vartheta$

Application du théorème:

- variation de l'énergie cinétique:  $\frac{1}{2}\rho d\vartheta(V_2^2 - V_1^2)$
- travail des forces de pression:  $(p_1 - p_2)d\vartheta$
- travail des forces de pesanteur:  $\rho g(z_1 - z_2)d\vartheta$

On en déduit le théorème de Bernoulli:

Equation de Bernoulli:

$$\frac{1}{2}\rho V_1^2 + \rho g z_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho V_2^2 + \rho g z_2 + p_2 = H = c^{te} \quad (\text{en Pa}) \quad (11)$$

**Le long d'un filet de courant, l'équation de Bernoulli se conserve**

L'équation (11) est aussi connue sous le nom de **charge** (donc le terme charge sous-entend pression )

Si  $V_1 = V_2$  l'équation (3) devient:

$$\rho g z_1 + p_1 = \rho g z_2 + p_2 = c^{te} \quad (12)$$

### **Relation fondamentale de l'hydrodynamique.**

En divisant les membres de l'équation (11) par  $\rho g$ . On obtient:

$$\frac{V_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = c^{te} \quad (\text{en m}) \quad (13)$$

L'expression (13) est aussi appelée en hydrodynamique **charge** (cette fois-ci en (m) utilisée en hydraulique).

En multipliant l'équation (11) par  $\vartheta$  on obtient l'équation de Bernoulli en terme d'énergie mécanique

$$\frac{1}{2} \rho \vartheta V_1^2 + \rho \vartheta g z_1 + p_1 \vartheta = \frac{1}{2} \rho \vartheta V_2^2 + \rho \vartheta g z_2 + p_2 \vartheta = c^{te} \quad (\text{en Joule})$$

$$\frac{1}{2} m V_1^2 + m g z_1 + p_1 \vartheta = \frac{1}{2} m V_2^2 + m g z_2 + p_2 \vartheta = c^{te} \quad (\text{en Joule}) \quad (14)$$

Le premier terme est l'énergie cinétique, le second l'énergie potentielle et le dernier l'énergie de pression.

### **Enoncé: Théorème de Bernoulli:**

Dans un écoulement isovolume, permanent, d'un fluide parfait, la charge se conserve le long d'un filet de courant.

### **Remarques importantes sur le théorème de Bernoulli:**

- Ce théorème ne traduit pas la conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique)
- C'est un théorème de mécanique qui se contente de faire le bilan de la seule énergie mécanique (voir 14).

## **3.2. Application du théorème de Bernoulli et de l'Equation transversale de pression motrice**

### **☞ Application du théorème de Bernoulli aux écoulements en conduite**

Dans une conduite rectiligne, l'écoulement moyen apparaît comme un faisceau de tubes de courant. Bien sûr l'équation de Bernoulli reste constant sur chaque ligne. Pour rendre compte de l'énergie mécanique de l'écoulement, il est commode de faire une sommation des énergies et prendre la moyenne. Mais dans ladite équation, seule l'énergie cinétique est sommable (grandeur extensive). Or, on peut se ramener à l'énergie cinétique en multipliant l'équation de Bernoulli par le débit volume ( $Pax \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = \text{Puissance}$ ).

$\int \left( p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho V^2 \right) V ds = c^{te}$  dans cette expression la somme des deux premiers termes est constante (voir théorème de la variation de la pression motrice) sur une section pourvu que le tube soit rectiligne. On est donc amené à remplacer  $\int V^3 ds$  par une constante soit:

$\alpha V_m^3 S = \int V^3 ds$  avec  $V_m = \frac{1}{S} \int V ds$  (vitesse moyenne) et ou:

$$\alpha = \frac{1}{V_m^3 S} \int V^3 ds \quad (15)$$

est **appelé coefficient d'énergie cinétique**. En injectant ce résultat dans l'équation de Bernoulli, on a:

$(p + \rho gz)q_v + \frac{1}{2} \alpha \rho V_m^2 q_v = c^{te}$  soit encore, puis que le débit est constant:

$$p + \rho gz + \frac{1}{2} \alpha \rho V_m^2 = c^{te} \quad (16)$$

**Conclusion** : Dans une conduite, le théorème de Bernoulli s'applique mais l'énergie cinétique doit être corrigée. Pour les écoulements à grand nombre de Reynold (turbulents)  $\alpha \cong 1$ , on pourra utiliser la vitesse de débit sans correction.

### ☞ Applications aux pressions

Dans un écoulement permanent, les lignes de courants (trajectoires) sont rectilignes et distinctes. La connaissance de la pression en un point quelconque A permet de calculer la pression en un autre point B.

Stratégie:

- On choisit un point C sur la ligne de courant du point B
- On passe de A à C par la pression motrice
- On passe de C à B par Bernoulli
- On raccorde les deux trajectoires

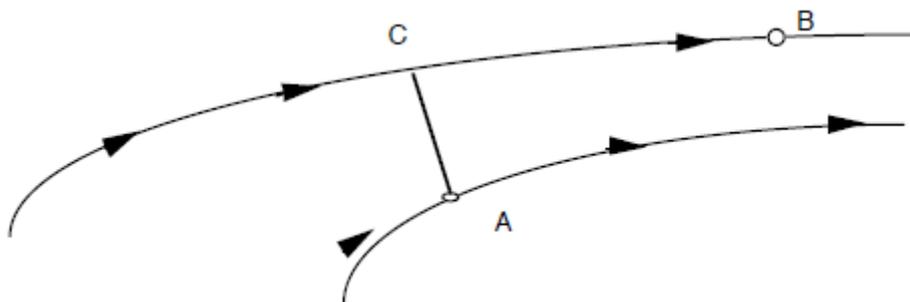


Fig 3.7: Détermination de la pression en tout point connaissance la pression en un point

**Pression d'arrêt**: c'est la pression au point d'arrêt quand on place un obstacle dans un écoulement. Sur une ligne horizontale Bernoulli s'écrit:

$$p_M = p + 1/2 \rho V^2 \quad (17)$$

**Mesure de la pression sur une conduite**: Un simple trou sur la conduite relié à un manomètre nous fournit la pression dans la conduite.

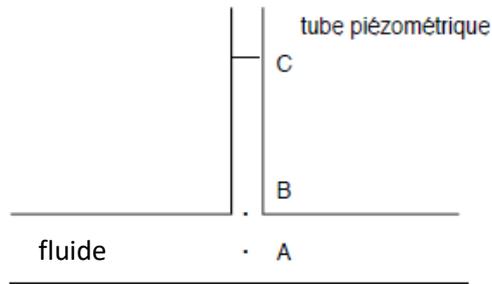


Fig 3.8: Tube piézométrique branché sur une conduite

Le théorème de pression motrice nous donne  $p_{mA} = p_{mB}$  et le théorème de statique  $p_{mB} = p_{mC}$ . On en déduit la relation:

$$p_A = p_{atm} + \rho gh \quad (18)$$

### Tube de Pitot

Le tube de Pitot sert à mesurer la vitesse locale d'un fluide en le reliant à la différence de pression d'un manomètre à liquide.

#### Problème

On considère un écoulement et on plonge un tube de Pitot de telle sorte qu'il soit parallèle aux lignes de courant (Voir fig 3.9 ci-dessous).

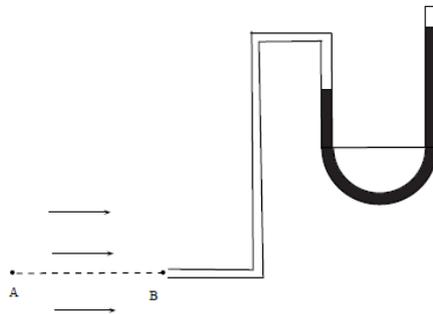


Fig 3.9: Tube de Pitot

A son embouchure, le fluide peut y pénétrer. Une fois qu'il a occupé tout l'espace disponible au sein du tube, il n'y a plus de fluide qui entre et la vitesse au point B, embouchure de tube, est nulle. On l'appelle un **point d'arrêt** de la ligne de courant. Dans ces conditions, quelle peut être la vitesse d'écoulement du fluide.

#### Solution

Considérons une ligne de courant A - B. En A, on a  $p = p_A$  (par exemple une pression hydrostatique),  $v = v_A = v_\infty$ , et  $z = z_A$ . En B, on a  $p = p_B$ ,  $v_B = 0$ , et  $z = z_A = z_B$ . Le théorème de Bernoulli s'écrit donc

$$\frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A + p_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B + p_B = \rho g z_A + p_B$$

$$\text{d'où } v_A = v_\infty = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_B - p_A)}$$

Comme la différence de pression  $p_B - p_A$  peut être déterminée si on utilise un manomètre (tube en U), on peut calculer la vitesse  $v_\infty$ .

**Remarque importante**

Dans l'équation de Bernoulli

$p$  est appelé **pression statique**, et la somme

$\rho \frac{V^2}{2} + p$  **pression totale ou pression de stagnation ou encore pression d'arrêt**

Dispositif de mesure de ces différentes pression dans la pratique

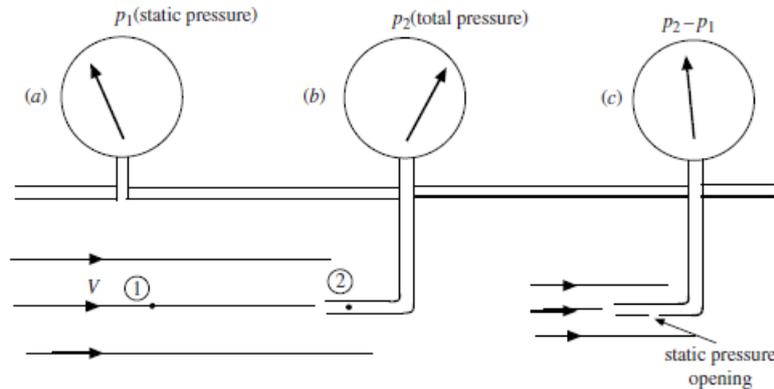


Fig 3.10: Dispositifs de mesure de pression: (a) piézomètre pour mesure de pression statique (b) tube de Pitot pour mesure de pression totale et (c) tube de Pitot-statique pour la mesure de la différence des deux pressions précédentes.

**Application aux vitesses**

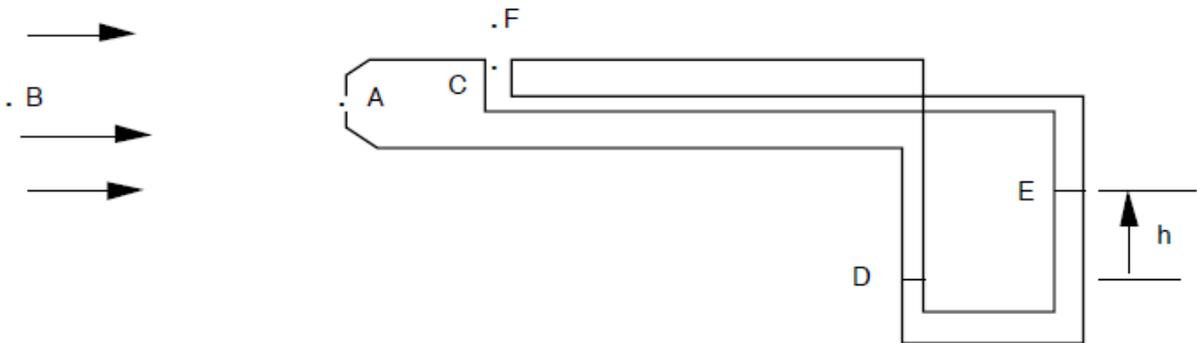


Fig 3.11: Tube de Pitot double pour mesurer la vitesse

Pour mesurer une vitesse, on peut utiliser un tube de Pitot double qui donne accès à la pression dynamique  $\frac{1}{2} \rho V^2$  en mettant en opposition un Pitot d'arrêt et une sonde de pression statique. Le cas de la Fig 3.8 est un Pitot double placé dans l'air avec un manomètre à eau. On a:

$$\frac{1}{2} \rho_{air} V_B^2 + \rho_{air} g h_B + p_B = \frac{1}{2} \rho_{air} V_A^2 + \rho_{air} g h_A + p_A$$

$V_A = 0$  (point d'arrêt) et  $\rho g h_B = \rho g h_A$  donc  $\frac{1}{2} \rho_{air} V_B^2 + p_B = p_A$

Dans la branche gauche:  $p_D = p_A$

Dans la branche de droit:  $p_D = p_E + \rho_{eau}gh$  et  $p_E = p_F = p_{atm}$

Donc  $\frac{1}{2}\rho_{air}V_B^2 + p_B = p_E + \rho_{eau}gh$  et  $p_E = p_B = p_{atm}$  d'où:

$$V = \sqrt{\frac{2\rho_{eau}gh}{\rho_{air}}}$$

#### ☞ Application Effet Venturi: mesure de débit

Dans un tube de courant d'un écoulement permanent, la vitesse de débit augmente lorsque la section diminue, alors que la pression diminue en même temps que la section. Le débitmètre Venturi utilise ces résultats

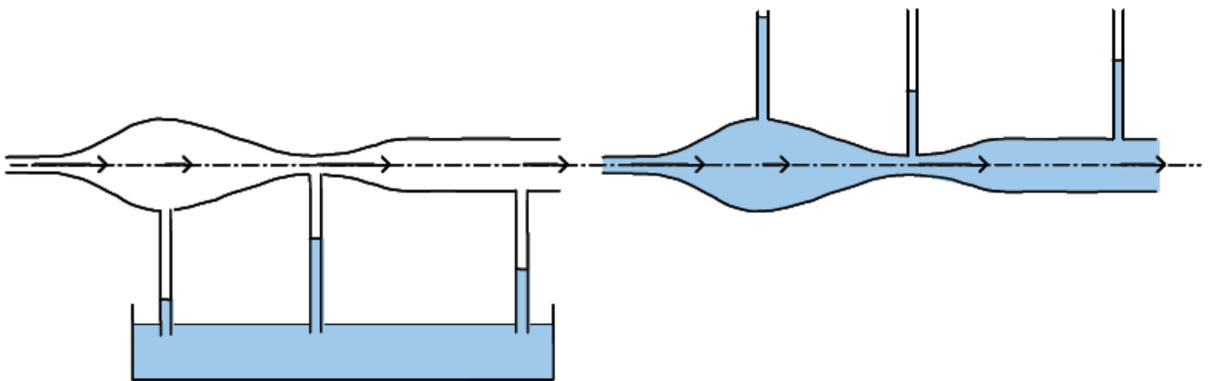


Fig 3.12: Tube Venturi

**Exercice:** A l'aide de des équations de continuité et de Bernoulli, démontrer les résultats annoncés (vitesse élevée et pression faible au niveau du col) (Fig 3.12).

On considère un écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible d'axe horizontal et de **section lentement variable** (Fig 3.13). Bernoulli s'écrit donc:

$$\frac{1}{2}\rho V_{A_1}^2 + p_{A_1} = \frac{1}{2}\rho V_{A_2}^2 + p_{A_2}$$

$$V_{A_2}^2 - V_{A_1}^2 = V_{A_2}^2 \left(1 - \frac{V_{A_1}^2}{V_{A_2}^2}\right) = \frac{2}{\rho} (p_{A_1} - p_{A_2})$$

L'équation de continuité s'écrit:  $\rho V_{A_1} s_1 = \rho V_{A_2} s_2$  on déduit:

$$1 - \frac{V_{A_1}^2}{V_{A_2}^2} = 1 - \frac{s_2^2}{s_1^2} \text{ et donc: } V_{A_2} = \left[ \frac{2}{\rho} \cdot \frac{(p_{A_1} - p_{A_2})}{1 - (s_2/s_1)^2} \right]^{1/2}$$

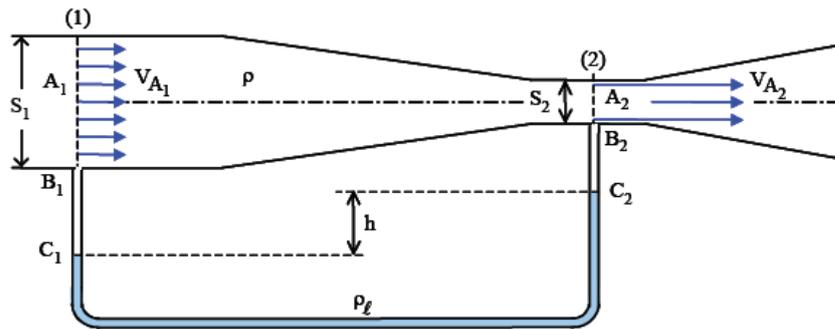


Fig 3.13: Débitmètre de Venturi

Finalement une simple lecture de la dénivellation dans le manomètre permet de calculer la vitesse au niveau du col et donc le débit.

$$V_{A_2} = \left[ \frac{2}{\rho} \cdot \frac{gh(\rho_l - \rho)}{1 - (s_2/s_1)^2} \right]^{1/2} \quad (19)$$

#### 👉 Formule de Torricelli

La formule de Torricelli permet de calculer la vitesse de vidange d'un récipient contenant une hauteur  $h$  d'un liquide ( de masse volumique  $\rho$  )

#### Problème

Le récipient ci-dessous(Fig 3.14) contient sur une hauteur  $h$ , un liquide (de masse volumique  $\rho$ ). Le récipient est muni au point B d'un petit orifice par lequel le liquide s'échappe sous l'effet de la pesanteur (**jet libre**). On suppose que le diamètre ( $d$ ) de l'orifice est très petit devant celui du récipient( $D$ ) .

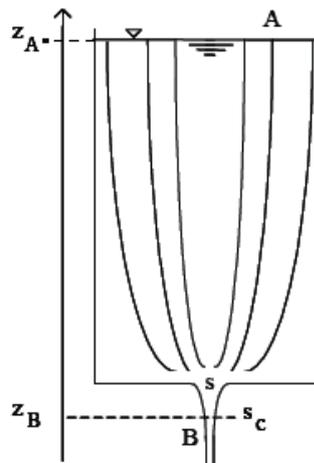


Fig 3.14: Vidange d'un réservoir

En appliquant le théorème de Bernoulli donner

- l'expression de la vitesse à laquelle le liquide s'échappe en B
- l'expression du temps qu'il faudra pour vider complètement le récipient

#### Solution

a) On prend une ligne de courant allant de A à B.

le théorème de Bernoulli s'écrit:

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B + p_B$$

le diamètre du réservoir est très grand devant celui de l'orifice. Donc l'écoulement peut être considéré permanent; et la vitesse  $v_A$  très faible ( $\cong 0$ ).

De plus  $p_A = p_B = p_{atm}$ . Donc l'équation précédente devient:

$$2\rho g(z_A - z_B) = 2\rho g h = \rho v_B^2 \text{ et}$$

$$v_B = \sqrt{2gh} \tag{20}$$

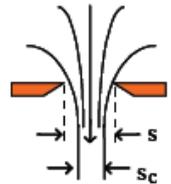
b) Il ya conservation de masse donc conservation de débit volumique aussi ( $\rho = cst$ )  $Sv_A = sv_B$  soit  $v_B = \frac{s_A}{s_B}v_A$ . Pour un déplacement élémentaire  $dh$  de fluide dans le réservoir, on a:  $v_A = -\frac{dz}{dt}$  donc

l'équation de Bernoulli devient:  $v_B^2 = v_A^2 + 2gh$  soit:  $\left(\frac{s_A}{s_B}\right)^2 v_A^2 = v_A^2 + 2gz$ ; on en tire:

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = -\delta dt, \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{s_A}{s_B}\right)^2 - 1}} \text{ et après intégration on a: } z = \left(\sqrt{h} - \frac{\delta}{2}t\right)^2 \text{ on déduit la durée de}$$

vidage:

$$t = \frac{2\sqrt{h}}{\delta} = \sqrt{\frac{2h\left(\frac{s_A}{s_B}\right)^2 - 1}{g}} \tag{21}$$



### 3.3 Les limites d'application du théorème de Bernoulli

Dans le cas d'un fluide parfait non en écoulement permanent, l'équation (11) peut être l diagramme suivant:

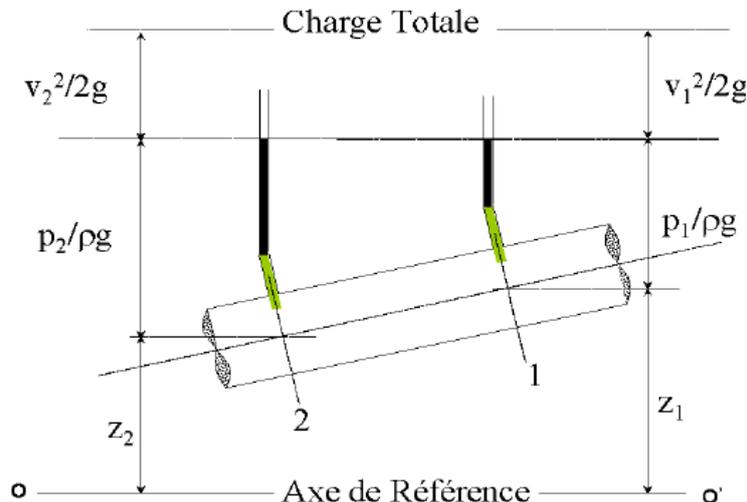


Fig 315: Répartition de charge le long d'un filet de courant dans une conduite pour fluide non visqueux. La charge reste constante dans la direction de l'écoulement ( $dH/dx = 0$ )

Contrairement au fluide parfait, la charge  $H$  pour un fluide réel visqueux diminue dans la direction de l'écoulement ( $dH/dx < 0$ ).

Ceci est dû à la nature visqueuse du fluide qui dissipe une partie de l'énergie: cette perte est appelée **Perte de charge**.

La représentation graphique pour un fluide réel est donc, **Equation de Bernoulli pour un fluide Réel**:

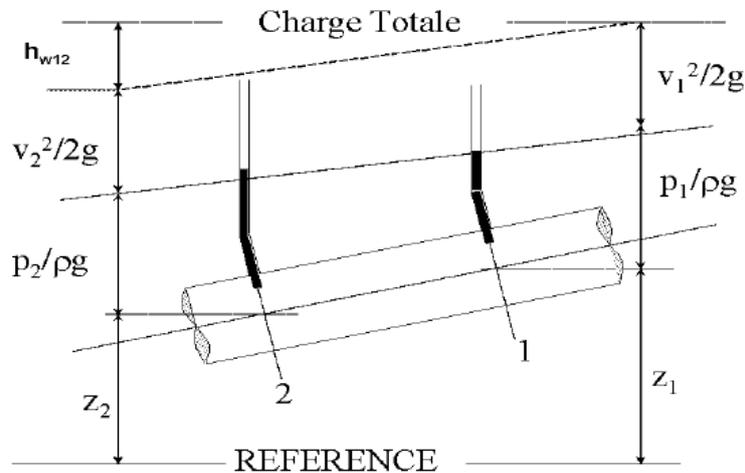


Fig 3.16: Répartition de charge le long d'un filet de courant dans une conduite pour fluide réel. La charge diminue dans le direction de l'écoulement ( $dH/dx < 0$ )

L'équation de Bernoulli, pour un fluide réel, devient donc:

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_{w12} \quad (24)$$

avec:  $h_{w12}$  : **Perte de charge totale entre les section 1 et 2.**

Selon l'origine des pertes de charge, on distingue:

- La perte de charge primaire ou "répartie", notée  $h_r$ , qui est la conséquence de la viscosité du fluide et de la rugosité des parois de la section d'écoulement
- La perte de charge secondaire ou "locale" ou "singulière", notée  $h_s$ , qui est la conséquence d'une modification dans la nature physique de la section d'écoulement (élargissement rétrécissement, changement de direction etc.)

La perte de charge totale est donc la somme des 2 pertes de charge répartie et singulière:

$$h_w = h_r + h_s$$

#### ☞ Les Régimes d'écoulement: **Le nombre de Reynolds**

Les écoulements sont classés en deux régimes principaux:

- "Laminaire" et "Turbulent"
- Séparés par une phase transitoire appelée "régime transitoire"

Pour caractériser ces régimes d'écoulement, on introduit un nombre adimensionnel, appelé "**Nombre de Reynolds**", noté  $R_e$  et calculé par la formule:

$$R_e = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho}{\mu} VD \quad (25)$$

avec:

- $V$  = vitesse moyenne de l'écoulement =  $Q_v/A$
- $D$  = diamètre de la section d'écoulement (circulaire)
- $\nu$  = viscosité cinématique du fluide  $\mu = \nu/\rho$
- $\mu$  = viscosité dynamique du fluide

Les limites du Nombre de Reynolds définissant les différents régimes d'écoulement peuvent être résumées comme suit:

- $Re \leq 2000$  : le régime est laminaire
- $2000 < Re < 4000$  : le régime est critique
- $Re \geq 4000$  : le régime est turbulent

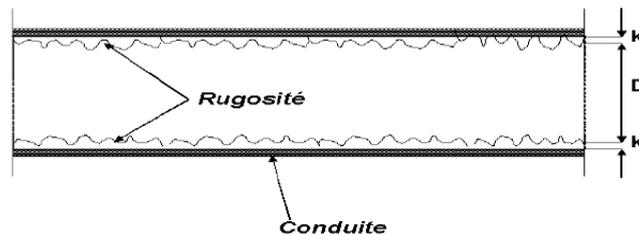
#### ☞ Calcul des pertes de Charge

- **Les pertes de charges Linéaires ou Réparties**

##### Notion de rugosité des conduites

Contrairement à une surface lisse, une surface rugueuse implique un état de surface dont les irrégularités ont une action directe sur les forces de frottements

Une surface rugueuse peut être considérée comme étant constituée par une série de protubérances élémentaires caractérisées par une hauteur, notée  $k$  et appelée "**Rugosité**":



Afin de comparer la rugosité au diamètre de la conduite, on introduit le rapport:

$$\varepsilon = \frac{k}{D}$$

- **Expression de la perte de charge due aux frottements:**

La perte de charge linéaire est calculée par le formule de Darcy - Weisbach (1857)

$$h_r = \lambda \frac{L V^2}{D 2g} \quad (26)$$

avec:

- $D$  = diamètre de la section d'écoulement
- $L$  = Longueur de la conduite
- $V$  = vitesse moyenne d'écoulement
- $\lambda$  = coefficient de frottement (sans unité)

Plusieurs formules sont proposées pour le calcul de  $\lambda$  et dépendent du régime d'écoulement:

Pour le cas d'un régime laminaire ( $Re \leq 2000$ )

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (27)$$

- **Les pertes de Charge Locales ou Singulières**

## Expression générale d'une perte de charge singulière

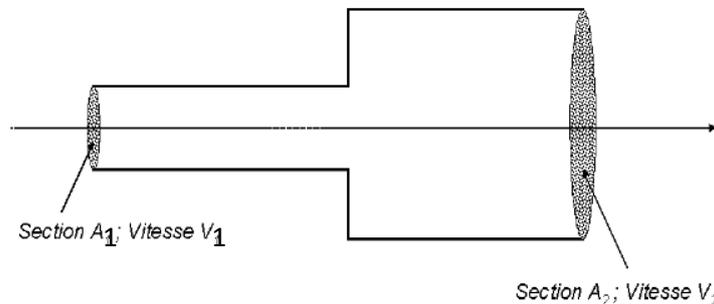
En plus des pertes de charge linéaires, la perte de charge singulière se produit localement au niveau d'une modification brusque de la nature physique de la section d'écoulement. Elle se calcule par la formule générale suivante:

$$h_s = \zeta_s \frac{V^2}{2g} \quad (28)$$

avec:

✚  $\zeta_s$  = coefficient qui dépend de la nature de la déformation

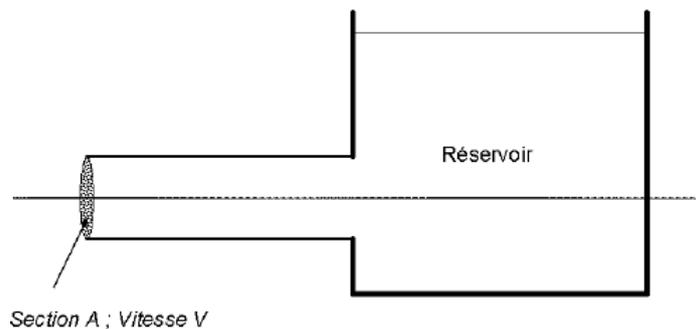
### Cas d'un élargissement brusque de la section d'écoulement Élargissement brusque de section



Dans ce cas:

$$\zeta_s = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad (29)$$

### Sortie vers un réservoir:



Dans ce cas, la section de réservoir étant très grande par rapport à celle de la conduite,  $\frac{A_1}{A_2} \rightarrow 0$  et

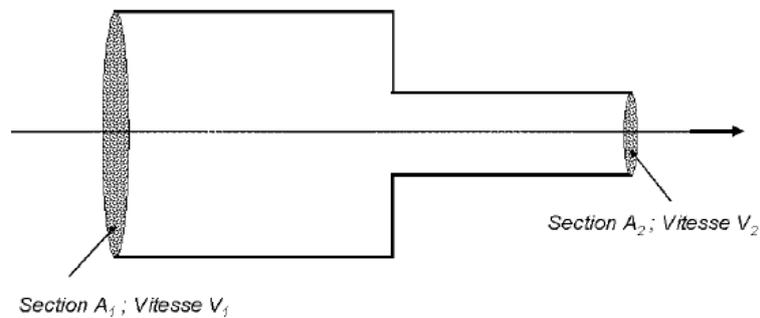
$$\zeta_{sor} = 1$$

### Cas d'un Rétrécissement brusque de la section d'écoulement

#### Rétrécissement brusque de section

La formule s'écrit:

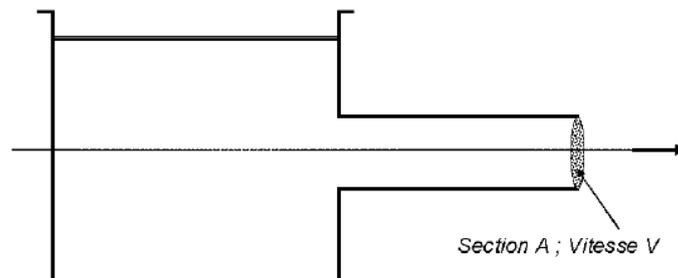
$$h_{srb} = \zeta_{rb} \frac{V^2}{2g} \quad (30)$$



avec :  $\zeta_{rb}$  = Coefficient due au rétrécissement brusque donné par le tableau suivant:

$A_2/A_1$	0,1	0,5	0,7
$\zeta_{rb}$	0,41	0,24	0,14

#### Cas d'une sortie Réservoir - Conduite



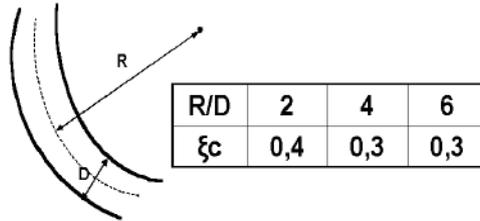
Dans ce cas, on prend  $\zeta_{rb} = 0,5$

#### Autres pertes de charge Singulières:

D'autres types de pertes de charge peuvent avoir lieu dans les conduites:

- Coudes
- Vannes
- Crépines, etc.

Exemple: Cas d'un coude:



### 3.26 Théorème de Bernoulli: Cas d'un écoulement avec échange de travail

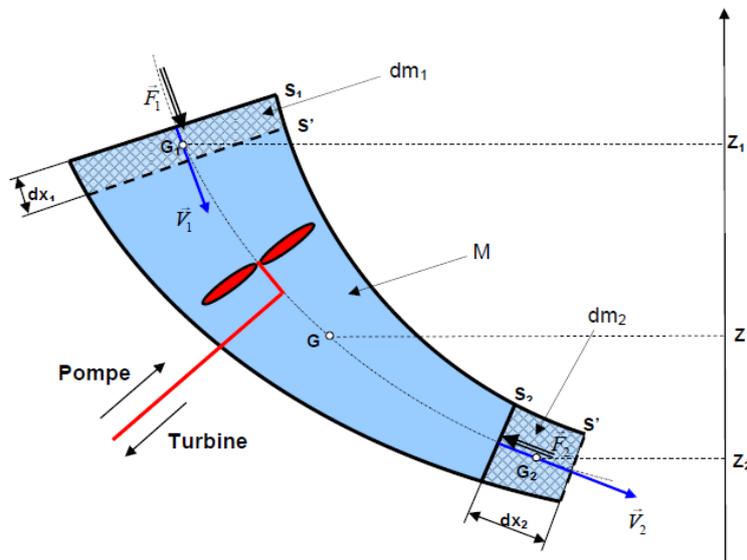
Supposons un écoulement à travers une veine fluide (ou un canal) dans laquelle est incérée une machine hydraulique est placée entre deux sections  $S_1$  et  $S_2$ . Cette machine est caractérisée par une puissance utile ou nette  $P_{net}$  échangée avec le fluide, une puissance absorbée  $P_a$  avec un certain rendement  $\eta$ . Cette machine peut être soit une turbine soit une pompe.

- Dans le cas d'une pompe: le rendement est donné par l'expression suivante:

$$\eta = \frac{P_{net}}{P_a}$$

- Dans le cas d'une turbine: le rendement est donné par l'expression suivante:

$$\eta = \frac{P_a}{P_{net}}$$



Dans ce cas, l'équation de Bernoulli s'écrit:

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = \frac{P_{net}}{Q_m}$$

avec:

- $P_{net}$  Compté négativement dans le **cas d'une turbine**
- $P_{net}$  Compté positivement dans le **cas d'une pompe**